

Estudio y generación de un haz láser con momento angular orbital definido



Julio César Quiceno Moreno

Proyecto de investigación presentado como requisito
parcial para optar por el título de:
Magíster en Ciencias-Física

Director: Efraín Solarte Dr. *rer.nat.*

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle
Santiago de Cali
2015

A la Damita y a Iris, Tama y Newton.

Agradecimientos

Al profesor Efraín Solarte por haber propuesto el tema de trabajo y permitir el uso del laboratorio del grupo de óptica cuántica de la Universidad del Valle, GOCUV, y a los miembros del grupo por sus aportes y comentarios durante las sesiones del seminario.

Al profesor Yezid Torres por recibirme para una pasantía en el laboratorio del Grupo de óptica y tratamiento de señales, GOTS, de la Universidad Industrial de Santander y al estudiante de postgrado Cristian Acevedo por su colaboración para generar los primeros vórtices ópticos del proyecto.

Al profesor Luis Hernandez de la Escuela de Comunicación Social de la Universidad del Valle, por aportar para este trabajo una bobina de película de alto contraste Kodalith y a la estudiante de postgrado Carolina Vidal por compartirme sus conocimientos sobre la técnica de fotografía analógica en el laboratorio de la misma Escuela.

Al profesor Juan Carlos Muñoz del Departamento de Matemáticas por las fructíferas discusiones sobre aspectos teóricos del trabajo.

A los profesores Gustavo Zambrano, Maria Elena Gómez, Jesús Tabares y Pedro Prieto por facilitar instrumentos útiles para el arreglo experimental del trabajo y a los demás profesores del Departamento de Física de la Universidad el Valle con quien tomé los cursos avanzados de la maestría.

Al personal técnico de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Hernan Andrade, Carlos Román y Carlos Arango, por ayudarme a recuperar piezas para el montaje interferométrico y a personas externas a la universidad, Walter Velasco y Andrés Arboleda y la empresa Acrílicos del Valle por la elaboración de algunas piezas ópticas exploratorias.

Muy especialmente a mi compañera Camila Ortegón y a mis padres y hermanos por su participación en aquello que escapa de interpretación Física.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se describe de manera constructiva la conservación de las propiedades angulares del campo electromagnético y la descomposición del momento angular y del flujo de momento angular en sus componentes orbital y espinorial. A partir de este resultado y siguiendo recomendaciones de trabajos anteriores se adopta una versión simplificada de los modos Laguerre-Gauss, que conserva principalmente el factor de fase azimutal, para generar haces que transportan momento angular orbital (MAO). Estos haces conocidos como vórtices ópticos se generaron usando holografía mediante modulador espacial de luz y las propiedades de fase se confirmaron mediante interferometría (en un arreglo tipo Mach-Zehnder) entre el vórtice y la onda Gaussiana de referencia. Emulando la técnica anterior nuevos hologramas digitales que involucran simetrización y binarización de la imagen fueron impresos en papel a la máxima resolución posible y mediante la implementación de fotografía analógica se plasmaron sobre acetato de alto contraste (Kodalith 35 mm). A partir de esta técnica se generaron vórtices ópticos, siendo la primera vez que se logra en la Universidad del Valle, cuyas propiedades de fase fueron confirmadas mediante interferometría con onda Gaussiana y onda esférica. Los interferogramas de espirales entrelazadas obtenidos presentan buena resolución y contraste. La portabilidad del holograma fotográfico permitió construir una herramienta pedagógica útil para la introducción del momento angular orbital de la luz. Finalmente, la exploración de esta técnica, holograma sobre negativo fotográfico, permitió construir aberturas ópticas y hologramas compuestos útiles para próximos estudios.



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN MAESTRÍA EN
CIENCIAS-FÍSICA

Estudiante: JULIO CÉSAR QUICENO MORENO
Título de la Tesis: "ESTUDIO Y GENERACIÓN DE UN HAZ LÁSER CON MOMENTO ANGULAR ORBITAL DEFINIDO"
Fecha y Hora: Lunes 29 de febrero de 2016, 11:00 a.m.
Director: Dr. Efraín Solarte Rodríguez
Jurados: Dr. Edgar Alberto Rueda Muñoz (Universidad de Antioquia)
Dr. César Alonso Valenzuela Toledo (Universidad del Valle).

RESULTADO DE LA EVALUACIÓN:

☒ APROBADA () MERITORIA () LAUREADA


Si la nota es **Meritoria** o **Laureada**, el jurado deberá sustentarla en hoja separada con la firma de todos ellos y anexarla al Acta.

- () REPROBADA El estudiante debe matricularse nuevamente en esta actividad.
() PENDIENTE El estudiante debe acoger las recomendaciones del jurado y presentar nuevamente el documento ante el Director de Tesis. Requiere () No requiere () nueva sustentación. El plazo para nueva sustentación y/o para presentación del documento final es de _____.


Dr. EDGAR ALBERTO RUEDA MUÑOZ
Jurado


Dr. CÉSAR ALONSO VALENZUELA
Jurado


Dr. EFRAÍN SOLARTE RODRÍGUEZ
Director de Trabajo de Investigación


Dr. JAVIER MADROÑERO PABÓN.
Coordinador de la sustentación
Director Posgrado en Física

Introducción

Desde 1936 se conoce experimentalmente que la luz provoca un efecto angular sobre la materia asociado a la polarización circular¹⁻⁵ denominado Momento Angular de Spín (MAS). Posteriormente, en 1992⁶ se propuso la medición de otro efecto angular de la luz y se denominó Momento Angular Orbital (MAO).

El primer trabajo sobre un haz que transporta MAO⁶, motivo de este trabajo de investigación, surgió aplicando la distribución de amplitud *Laguerre-Gauss*, L-G, a un haz linealmente polarizado, representado por un potencial vector de la forma $\mathbf{A} = e^{-ikz}u(x, y, z)\hat{\mathbf{x}}$, donde $u(x, y, z)$ satisface la ecuación de onda en la aproximación paraxial⁷. En ese mismo artículo *Allen* reconoció el uso de lentes cilíndricas^{8,9} para obtener un modo *Laguerre-Gauss*¹⁰⁻²⁰ a partir de uno *Hermite-Gauss*²¹⁻²⁵.

Ambos momentos angulares, MAS y MAO, deben su nombre a la analogía con las componentes del momento angular del electrón en el átomo y al efecto observado de la luz sobre la materia, uno de tipo spinorial²⁶⁻²⁸ y el otro de tipo orbital²⁹⁻⁴⁷. Sin embargo, pese a la aparente distinción de sus efectos, las propiedades geométricas⁴⁸⁻⁵⁹, las relaciones de conservación⁶⁰⁻⁶⁸ y sobre todo la separabilidad^{69,71-83} carecen de trivialidad tanto teórica como experimental.

En laboratorio la primera transferencia de momento angular orbital de la luz fue generada por *He* en 1995⁸⁴, utilizando un haz láser con singularidad en la fase sobre partículas coloidales de alto índice de refracción. A partir de este trabajo inicia la promoción⁸⁵⁻⁸⁸ y divulgación del potencial que acompaña este nuevo grado de libertad de la luz⁸⁹⁻¹⁰⁰.

El tratamiento teórico del MAO de la luz, considerado un problema no concluido para la física, se aborda generalmente desde la Electrodinámica Clásica debido a la existencia de limitaciones instrumentales para examinar sistemas de fotones individuales, pero principalmente por los conocidos avances en difracción e interferometría de modos láser a través de rejillas tipo tenedor^{25,101-104} y el poder descriptivo de la óptica matricial¹⁰⁵⁻¹¹⁰ y la óptica paraxial^{56,111-123} tal y como se utilizará en este trabajo. Sin embargo, la descripción del MAO desde la electrodinámica cuántica reúne trabajos destacados sobre su representación¹²⁴⁻¹³⁴, relaciones de incertidumbre^{135,136} y cuantización de los modos *L-G*¹³⁷⁻¹⁴⁷.

La innovación en los métodos para generar modos *Laguerre-Gauss* en forma de Vórtices Ópticos (VO) o modos en forma de dona por el contraste

entre la región oscura y sus alrededores brillantes, ha permitido pasar de las lentes cilíndricas^{6,148–151}, a las placas de fase en espiral^{152–175}, dispositivos y superficies nanométricos^{176–187}, axicones^{188–195}, mediante interferencia de ondas^{196–198}, q-plates^{199–202}, prisma Dove^{203–206}, y el más común y versátil de todos los métodos, la difracción de pulsos *Gaussianos* mediante Hologramas Generados por Computador (HGC)^{89,170,207–225} donde se destacan por su alta resolución el modulador espacial de luz (MEL)^{226–236}, y la nanofotolitografía^{237–240}. Métodos de generación de haces que transportan MAO menos frecuentes pueden observarse en referencias adicionales^{167,241–246}.

Para confirmar el transporte de momento angular orbital por parte de un haz con singularidad en la fase se debe medir su carga topológica^{247–255}, la cual puede ser también fraccional^{256–268}. La medición se puede realizar utilizando sistemas ópticos que involucren aberturas con geometría específica^{269–275}, máscaras de fase^{276,277}, lentes convexas²⁷⁸, péndulos de torsión²⁷⁹, contadores de coincidencias^{280–285} o rejillas de difracción compuestas^{286,287}. Estas últimas, útiles incluso para haces de electrones^{288,289}.

Investigación básica con haces que transporten MAO ha permitido estudiar fenómenos de interferencia^{290–297}, reflexión²⁹⁸ y difracción mediante HGC^{299,300}, transmisión a través de medios dispersivos³⁰¹, con esparcimiento³⁰², medios anisotrópicos³⁰³ y materiales dieléctricos entre ellos la placa con fase en espiral³⁰⁴. Adicionalmente, se han utilizado haces MAO en medios no lineales para generación de segundo armónico³⁰⁵ y vórtices solitónicos³⁰⁶.

Esta propiedad de la luz representa en si misma una línea de investigación aplicada, de tal manera que actualmente haces que transportan MAO se utilizan para atrapamiento y manipulación de partículas y células^{307,308} para transferir datos a través del aire³⁰⁹ y mediante fibras ópticas^{310–312}. Trabajos más recientes incluyen intrincamiento de modos LG^{313–322,325–332} y manipulación de condensados de Bose-Einstein^{333–335}. Aplicaciones adicionales para haces que transportan MAO involucran fenómenos en Astrofísica³³⁶, materiales fotónicos³³⁷ e interacciones opto-acústicas³³⁸, entre otras.

Dada la versatilidad de las aplicaciones del MAO de la luz y la necesidad de extender aún más las áreas de investigación del grupo de óptica cuántica de la Universidad del Valle (GOCUV) este trabajo se presenta como punto de partida para adelantar futuras investigaciones teóricas y experimentales sobre descripción, generación, medición y aplicaciones de haces láser que poseen factor de fase azimutal. En este sentido se propone abordar el problema de la separabilidad del momento angular de la luz a partir de las propiedades me-

cánicas del campo electromagnético, presentando una deducción alternativa del MAO de la luz mediante el álgebra vectorial y describir las características básicas de los modos *Laguerre-Gauss* y la relación entre el factor de fase azimutal con la carga topológica m . Luego, utilizando hologramas generados por computador mediante el software *Matlab*, se obtienen haces que transportan MAO mediante dos técnicas holográficas. Una corresponde al uso del modulador espacial de luz y la otra a la emulación de la anterior mediante fotografía analógica (35 mm) de alto contraste. En ambos casos la carga topológica y de manera equivalente el momento angular orbital de los vórtices producidos se confirmó mediante interferometría tipo Mach-Zehnder, en el primer caso con ondas Gaussianas y en el segundo con ondas Gaussianas y esféricas.

De este trabajo se espera adicionalmente construir una herramienta pedagógica de simple portabilidad que permita introducir el concepto de momento angular orbital de la luz. A manera de motivación para un próximo trabajo, se muestran imágenes del efecto de filtrado de un vórtice óptico a través de una abertura anular circular frente al fenómeno de interferencia con onda esférica. Finalmente se presentan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

Índice de figuras

1.1. Volumen y superficie de integración del campo EM.	4
2.1. Perfil de intensidad de un haz <i>Laquerre–Gauss</i>	14
2.2. Estructura de fase azimutal de haz <i>Laquerre–Gauss</i>	15
2.3. Frente de onda e intensidad de un vórtice óptico.	16
2.4. Representación pictórica del uso de un HGC para producir haces que transportan MAO.	17
3.1. Vórtice óptico generado mediante placa de fase en espira.	20
3.2. Hologramas generados por computador para uso en MEL.	21
3.3. Montaje experimental para MEL.	22
3.4. Vórtices ópticos con MAO $m\hbar$ para $m = 0, 1, 2, \dots, 11$	23
3.5. Montaje experimental para medir MAO mediante interferometría.	24
3.6. Interferogramas entre haz Gaussiano y vórtices ópticos.	25
3.7. Haluros de plata de una película fotográfica.	26
3.8. Hologramas binarizados para $m = 3$	27
3.9. Esquema para estimar la distancia d_f	28
3.10. Imagen del negativo fotográfico de 35 mm frente microscopio óptico.	29
3.11. Vórtices ópticos mediante película fotográfica.	30
3.12. Segundo montaje experimental para interferometría.	31
3.13. Vórtices ópticos y patrones de interferencia con onda Gaussiana.	32
3.14. Vórtices ópticos y patrones de interferencia con onda esférica.	34
3.15. Vórtices ópticos al pasar por una abertura anular circular.	35
A.1. Fotografía de hologramas en papel.	38
C.1. Ordenes de difracción para HGC con $m = 3$	40
D.1. Perfil de intensidad del láser <i>He – Ne</i>	41
D.2. Ajuste de interferómetro <i>Mach – Zehnder</i>	42
E.1. Medición de la carga topológica $ m $ mediante un interferómetro <i>Mach – Zehnder</i>	43
F.1. Abertura óptica en forma de vórtice.	44
G.1. Aberturas y hologramas compuestos.	45

Índice general

1. Momento Angular Orbital de la Luz	2
1.1. Propiedades Mecánicas del Campo Electromagnético	2
1.1.1. Conservación de la Energía	3
1.1.2. Conservación del Momento Lineal	4
1.1.3. Conservación del Momento Angular	5
1.1.4. Descomposición del Momento Angular	7
1.1.5. Descomposición del Flujo de Momento Angular	8
2. Modos Laguerre–Gauss y Holografía	12
2.1. Modos Laguerre–Gauss	12
2.1.1. Factor de Fase Azimutal	14
2.2. Holograma Generado por Computador	15
2.2.1. Geometría de un haz que transporta MAO	18
3. Generación y Medición de Vórtices Ópticos	19
3.1. Modulador Espacial de Luz	20
3.1.1. Vórtices Mediante el Modulador Espacial de Luz	21
3.2. Película Fotográfica	23
3.2.1. Vórtices mediante negativo fotográfico	28
3.2.1.1. Vórtice a través de abertura anular circular.	33
4. Conclusiones	36
A. Montaje para grabado de Hologramas	38
B. Código para HGC mediante MEL	39
C. Difracción de campo lejano con MEL	40
D. Perfiles de ajuste	41
E. Diagrama para determinación de la carga topológica	43
F. Abertura anular circular	44
G. Perspectivas	45
Bibliografía	46

Momento Angular Orbital de la Luz

Contents

1.1. Propiedades Mecánicas del Campo Electromagnético	2
1.1.1. Conservación de la Energía	3
1.1.2. Conservación del Momento Lineal	4
1.1.3. Conservación del Momento Angular	5
1.1.4. Descomposición del Momento Angular	7
1.1.5. Descomposición del Flujo de Momento Angular	8

A continuación se hará una descripción constructiva de la conservación de las propiedades mecánicas del campo electromagnético, de forma tal que se pueda abordar directamente el problema de la separabilidad del momento angular de la luz.

1.1. Propiedades Mecánicas del Campo Electromagnético

El conjunto de las ecuaciones de Maxwell 1.1 que relacionan el campo eléctrico \mathbf{E} y la inducción magnética \mathbf{B} con las densidades de carga ρ_f y corriente \mathbf{j} , permite obtener las propiedades mecánicas del campo electromagnético (EM)²⁹.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_o}. \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.1d)$$

La conservación de estas propiedades se expresa a través de las ecuaciones de continuidad, las cuales describen el cambio continuo de cantidades en términos de densidades. La razón de cambio para la densidad ρ_c de una cantidad conservada localmente está dada por la divergencia de la respectiva densidad de flujo \mathbf{j}_c y la densidad de fuentes q ³³⁹:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{j}_c = q. \quad (1.2)$$

Aquí, ρ_c puede representar la densidad de carga o energía electromagnética, así como también la densidad de momento lineal o angular EM y \mathbf{j}_c y q los correspondientes densidades de flujo y fuentes. En caso de una cantidad que se conserve localmente la densidad de fuentes se hace idénticamente igual a cero. A continuación, se hará una revisión de las ecuaciones de continuidad para la energía, el momento lineal y el momento angular del campo EM.

1.1.1. Conservación de la Energía

Es bien conocido que el trabajo por unidad de tiempo realizado por un campo electromagnético (EM) sobre una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} , ambos al interior de un volumen V se puede escribir, para una distribución ρ_f , utilizando las ecuaciones 1.1b y 1.1d y la identidad vectorial ($\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$) como:

$$\frac{dW}{dt} = - \int \mathbf{J} \bullet \mathbf{E} \, d^3r = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho^E \, d^3r + \int \nabla \bullet \mathbf{S} \, d^3r, \quad (1.3)$$

donde la densidad de energía del campo EM y la densidad del flujo de energía (vector de *Poynting*) están definidos por $\rho^E = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$ y $\mathbf{S}_E = \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right)$ respectivamente. La ecuación 1.3 se conoce como teorema de *Poynting* y representa la conservación de la energía en una región donde coexisten campos electromagnéticos, cargas y corrientes.

Si la superficie de integración de la figura 1.1 se hace lo suficientemente grande de tal manera que en la frontera de \mathbf{a} los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} valgan cero, la energía

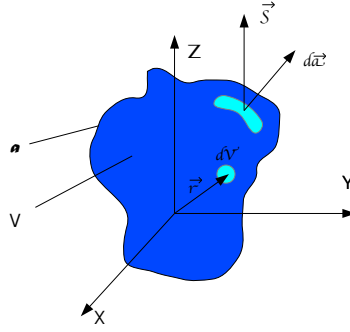


Figura 1.1: Volumen de integración de la ecuación 1.3 y la superficie **a** que lo envuelve.

total del sistema E se conserva³⁴⁰.

1.1.2. Conservación del Momento Lineal

El cambio de momento electromagnético, \mathbf{F} , que experimenta una distribución de cargas ρ_f en un volumen V se expresa como:

$$\frac{d\mathbf{P}^p}{dt} = \int (\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (1.4)$$

Utilizando las ecuaciones 1.1a, 1.1b y 1.1d y aplicando la identidad diádica $\nabla \bullet \left[\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbb{I}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}) \right] = \mathbf{A}(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$, la expresión toma la forma:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{P}^p + \mathbf{P}^E] + \int \nabla \bullet (\mathbb{T}) d^3r = 0, \quad (1.5)$$

donde el momento lineal del campo EM, \mathbf{P}^E , queda definido como³⁴⁰ :

$$\mathbf{P}^E = \int \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r, \quad (1.6)$$

y la densidad de flujo de momento lineal del campo EM, \mathbb{T} , o tensor de tensiones de *Maxwell*,

$$-\mathbb{T} = \left[\frac{1}{2} \mathbb{I} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right], \quad (1.7)$$

con nueve componentes, de las cuales seis son no nulas:

$$-T_{kl} = \left[\frac{1}{2} \delta_{kl} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 E_k E_l - \frac{1}{\mu_0} B_k B_l \right] = -T_{lk}, \quad (1.8)$$

donde δ_{kl} es el usual delta de Kronecker. Nótese que la traza de \mathbb{T} es igual a $-\rho^E$. Integrando con respecto a un volumen V que contenga los campos y las partículas y extendiendo hasta la frontera, con $\mathbb{T} = 0$, se tiene:

$$\mathbf{P}^p + \mathbf{P}^E = cte.$$

1.1.3. Conservación del Momento Angular

Aunque menos frecuente, el momento angular se calcula de manera análoga al momento lineal. La derivada temporal del momento angular mecánico del sistema de cargas es igual al torque total sobre la distribución en un volumen V y está definido por³⁴¹:

$$\frac{d\mathbf{J}^p}{dt} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, d^3r \quad (1.9)$$

\mathbf{f} es la densidad de fuerza del integrando en la ecuación 1.4. Incluyendo el efecto de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} ,

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{J}^E + \mathbf{J}^p] = \int \mathbf{r} \times \nabla \bullet (\mathbb{T}) \, d^3r. \quad (1.10)$$

Reescribiendo a partir de la identidad $\nabla \bullet (\mathbb{T} \times \mathbf{A}) = (\nabla \bullet \mathbb{T}) \times \mathbf{A} + (\mathbb{T}^T \bullet \nabla) \times \mathbf{A}$,

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{J}^E + \mathbf{J}^p] = \int \nabla \bullet (\mathbf{r} \times \mathbb{T}) \, d^3r + \int (\mathbb{T}^T \bullet \nabla) \times \mathbf{r} \, d^3r. \quad (1.11)$$

Ahora la componente i -ésima de la densidad de momento angular sería:

$$\frac{d}{dt} [J^E + J^P]_i = \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int \frac{\partial(x_j T_{kl})}{\partial x_l} d^3r + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int \frac{\partial x_j}{\partial x_l} T_{lk} d^3r. \quad (1.12)$$

El último término de la ecuación 1.12 es idénticamente igual a cero gracias a la suma doble sobre los índices j y k , ($\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$).

Así, finalmente se tiene que,

$$\frac{d}{dt} [J^E + J^P]_i = \int \sum_l \frac{\partial M_{il}}{\partial x_l} d^3r \quad (1.13)$$

donde $M_{il} \equiv \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl}$ corresponde al tensor densidad de flujo de momento angular, con componentes⁴⁹ :

$$M_{il} = \sum_{jl} \varepsilon_{ijl} x_j \rho^E - \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j \left(\varepsilon_0 E_k E_l - \frac{1}{\mu_0} B_k B_l \right). \quad (1.14)$$

Usando el teorema de la divergencia para un tensor M_{il} en 1.13,

$$\frac{d}{dt} [J^E + J^P]_i = \oint \sum_l M_{il} n_l da, \quad (1.15)$$

con $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} da$ como el elemento de superficie sobre el volumen V . La ecuación 1.15 expresa la conservación de momento angular del sistema de cargas y campos electromagnéticos en el volumen V encerrado por la superficie S ³⁴¹. La cantidad $\sum_l M_{il} n_l$ es la componente i -ésima del flujo de momento angular por unidad de área que cruza dicha superficie.

Por su parte, de la ecuación 1.10 el momento angular total del campo electromagnético es:

$$\mathbf{J}^E = \int \mathbf{r} \times \mathbf{P}^E d^3r = \int \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (1.16)$$

1.1.4. Descomposición del Momento Angular

Gracias al potencial del algebra vectorial en este trabajo se propone una separación alternativa del momento angular del campo EM, variando el procedimiento que sigue la referencia comunmente citada, *Cohen-Tannoudji*⁶⁹. De esta manera también es posible una expresión para el momento angular orbital espinorial y otra para el momento angular orbital de la luz, según se describe a continuación.

Reescribiendo la ecuación 1.16 mediante el triple producto vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})$ y escribiendo la inducción magnética en términos de su potencial vector, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r = \int \varepsilon_0 \mathbf{E} [\mathbf{r} \bullet (\nabla \times \mathbf{A})] d^3r - \int \varepsilon_0 (\mathbf{r} \bullet \mathbf{E}) (\nabla \times \mathbf{A}) d^3r. \quad (1.17)$$

El primer término del lado derecho de la igualdad 1.17 se transforma bajo la propiedad vectorial $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$ y el segundo término mediante $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \phi \times \mathbf{A}$, de tal manera que, con $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, tenemos

$$\mathbf{J}^E = \varepsilon_0 \int \{ \mathbf{E} [\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{r})] - \nabla \times [(\mathbf{r} \bullet \mathbf{E}) \mathbf{A}] + \nabla (\mathbf{r} \bullet \mathbf{E}) \times \mathbf{A} \} d^3r. \quad (1.18)$$

Como puede notarse, tenemos tres términos que involucran las entidades vectoriales básicas. El primer término del lado derecho de la ecuación 1.18 se integra mediante integración por partes para funciones vectoriales⁷⁰

$$\int \mathbf{E} [\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{r})] d^3r = - \int (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) (\nabla \bullet \mathbf{E}) d^3r + \oint_s [(\mathbf{A} \times \mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}] d\mathbf{S}.$$

En el vacío⁶² y aplicando el siguiente teorema integral

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) d^3r = \oint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{A},$$

se pueden seleccionar superficies de integración suficientemente grandes de tal forma que contengan los campos y en la frontera, donde $\mathbf{A} = 0$ y $\mathbf{E} = 0$, la ecuación 1.18 se reduce a

$$\mathbf{J}^E = \varepsilon_0 \int [(\nabla \otimes \mathbf{E}) \bullet \mathbf{r}] \times \mathbf{A} d^3r + \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3r. \quad (1.19)$$

donde se ha usado la identidad diádica, $\nabla(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = (\nabla \otimes \mathbf{B}) \bullet \mathbf{A} + (\nabla \otimes \mathbf{A}) \bullet \mathbf{B}$ y el hecho de que $(\nabla \otimes \mathbf{r}) = \mathbb{I}$.

El primer término, independiente de \mathbf{r} , se asigna al momento angular de espín \mathbf{S} por su naturaleza vectorial o de polarización. El segundo, a menos de que exista otra componente para el momento angular, se asocia al momento angular orbital de la luz \mathbf{L} , el cual conserva la dependencia en las magnitudes físicas \mathbf{E} , \mathbf{r} y \mathbf{A} pero difiere en la forma como se relacionan entre sí²⁹. La pertinencia de esta componente angular orbital y su comportamiento frente a transformaciones de invarianza hace parte de una investigación que se encuentra en marcha.

Resumiendo los resultados para las componentes del momento angular:

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3r. \quad (1.20)$$

$$\mathbf{L} = \varepsilon_0 \int [(\nabla \otimes \mathbf{E}) \bullet \mathbf{r}] \times \mathbf{A} d^3r. \quad (1.21)$$

Igualmente en este caso, la presencia del potencial vector en \mathbf{L} y \mathbf{S} genera inquietudes sobre el significado físico de la separación del momento angular de la luz, situación que será resuelta con la descomposición del flujo de momento angular.

1.1.5. Descomposición del Flujo de Momento Angular

El ejemplo más estudiado del momento angular óptico corresponde a un haz de luz con simetría cilíndrica a lo largo de su eje z ^{6,49}. A partir de la ecuación 1.14 la densidad de flujo de momento angular del campo EM a través de un plano z constante está dado por

$$M_{zz} \equiv M_{33} = y \left(\varepsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \right) - x \left(\varepsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z \right). \quad (1.22)$$

El flujo de momento angular total a través del plano z constante es $\iint M_{zz} dx dy$. Ahora, para analizar la separabilidad del flujo de momento angular se introducirán campos eléctricos y magnéticos complejos y limitando la atención a haces monocromáticos con frecuencia angular ω . La parte real de las componentes del campo E_i y B_i en términos de amplitudes de campo complejas \mathcal{E}_i y \mathcal{B}_i esto es $E_i = \text{Re} [\mathcal{E}_i \exp(-i\omega t)]$ y $B_i = \text{Re} [\mathcal{B}_i \exp(-i\omega t)]$, permiten obtener las ecuaciones de Maxwell en la forma⁴⁹

$$\mathcal{E}_j = -\frac{c^2}{i\omega} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{B}_l, \quad (1.23a)$$

$$\mathcal{B}_j = \frac{1}{i\omega} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_l. \quad (1.23b)$$

Ahora, integrando la ecuación 1.22 sobre un ciclo $T = 2\pi/\omega$ sólo sobreviven los términos sin el factor temporal $\exp(-i\omega t)$ obteniendo

$$\overline{M}_{zz} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[y \left(\varepsilon_0 \mathcal{E}_x \mathcal{E}_z^* + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_x^* \mathcal{B}_z \right) - x \left(\varepsilon_0 \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z^* + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_y^* \mathcal{B}_z \right) \right]. \quad (1.24)$$

Las componentes del campo eléctrico y la inducción magnética del flujo de momento angular promedio por ciclo pueden ser eliminadas utilizando las ecuaciones 1.23. El flujo de momento angular total \mathcal{M}_{zz} es obtenido por integración sobre el plano xy resultando, en coordenadas polares, la suma de estas dos contribuciones

$$\mathcal{M}_{zz}^{spin} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2\omega} \text{Re} \left[-i \iint \rho d\rho d\varphi (\mathcal{E}_x \mathcal{B}_x^* + \mathcal{E}_y \mathcal{B}_y^*) \right], \quad (1.25)$$

$$\mathcal{M}_{zz}^{orb} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{4\omega} \text{Re} \left[-i \iint \rho d\rho d\varphi \left(\mathcal{E}_y \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{B}_x^* - \mathcal{B}_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_y - \mathcal{E}_x \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{B}_y^* + \mathcal{B}_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{E}_x \right) \right], \quad (1.26)$$

separadas convenientemente para luego ser asociadas a los flujos de momento angular de espín y orbital. Estas cantidades contienen sólo los campos eléctricos y magnéticos⁴⁹. Para investigar estas componentes del flujo de momento angular total más allá de la aproximación paraxial se puede introducir un haz en forma general que satisface las ecuaciones de Maxwell y que posee una dependencia de fase azimutal $\exp(im\varphi)$ ³⁴². Las componentes de este campo eléctrico son

$$\mathcal{E}_x = \alpha \int_0^k d_{mp}(k) \mathcal{E}(\kappa) \exp(im\varphi) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z\right) J_m(\kappa\rho), \quad (1.27a)$$

$$\mathcal{E}_y = \beta \int_0^k d_{mp}(k) \mathcal{E}(\kappa) \exp(im\varphi) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z\right) J_m(\kappa\rho), \quad (1.27b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z = \int_0^k d_{mp}(\kappa) \mathcal{E}(\kappa) \exp(im\varphi) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \kappa^2}z\right) \frac{\kappa}{2\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \\ [(i\alpha - \beta)\exp(-i\varphi)J_{m-1}(\kappa\rho) - (i\alpha + \beta)\exp(i\varphi)J_{m+1}(\kappa\rho)], \end{aligned} \quad (1.27c)$$

con κ el número de onda transversal, $J_m(\kappa\rho)$ la función de Bessel de orden m y $k = \omega/c$. Los números α y β son seleccionados para satisfacer la ecuación $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Las expresiones para el campo magnético se encuentran utilizando la segunda de las ecuaciones de Maxwell en 1.23b. El término $d_{mp}(\kappa)$ se puede obtener de la expansión de los modos *Laguerre – Gauss* en términos de haces *Bessel* en la aproximación no-paraxial de acuerdo con Andrews et al.³³⁹ y constantes definidas en el siguiente capítulo. Obteniendo la forma:

$$d_{mp}(\kappa) = \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2k}z_R\right) \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{2p+|m|+1}. \quad (1.28)$$

Para este tipo de haz 1.27 el flujo de momento lineal total no tiene componentes en la dirección transversal, es decir, $\iint T_{xz}dxdy = 0$ y $\iint T_{yz}dxdy = 0$. Por esta razón, el flujo de momento angular es el mismo para cada eje paralelo a la dirección z . Además, puede anticiparse por la forma de la ecuación 1.25 que el flujo de momento angular de spin depende de α y β y no de l .

Reemplazando esta nueva forma de los campos en 1.26 y 1.25 se encuentra:

$$\mathcal{M}_{zz}^{spin} = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \frac{\pi\varepsilon_0 c^2}{2\omega^2} \int_0^k d_{mp}(\kappa) |\mathcal{E}(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa\sqrt{k^2 - \kappa^2}}. \quad (1.29)$$

$$\mathcal{M}_{zz}^{orbital} = m \frac{\pi\varepsilon_0 c^2}{2\omega^2} \int_0^k d_{mp}(\kappa) |\mathcal{E}(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa\sqrt{k^2 - \kappa^2}}. \quad (1.30)$$

donde se ha hecho uso de la integral Fourier-Bessel^{49,343}. Aquí puede notarse que estas expresiones tienen la dependencia esperada, lo cual justifica la separación del flujo de momento angular en sus partes de espín y orbital.

Aplicando un tratamiento análogo para la componente z de la densidad del flujo de energía, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_z &= \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re} \left[\iint \rho d\rho d\varphi (\mathcal{E}_x \mathcal{B}_y^* + \mathcal{E}_y \mathcal{B}_x^*) \right] \\
&= \frac{\pi}{2\omega\mu_0} \int_0^k d_{mp}(\kappa) |\mathcal{E}(\kappa)|^2 \frac{2k^2 - \kappa^2}{\kappa \sqrt{k^2 - \kappa^2}},
\end{aligned} \tag{1.31}$$

la cual corresponde a la misma integral de las ecuaciones 1.29 y 1.30. La razón de estas respectivas cantidades esta dada por:

$$\frac{M_{zz}^{orbital}}{\mathcal{S}_z} = \frac{m}{\omega}. \tag{1.32}$$

$$\frac{M_{zz}^{spin}}{\mathcal{S}_z} = \frac{\sigma_z}{\omega}. \tag{1.33}$$

$$\frac{M_{zz}}{\mathcal{S}_z} = \frac{\sigma_z + m}{\omega}. \tag{1.34}$$

Aquí se ha hecho $\sigma_z = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$, la cual determina la polarización. Para $\beta = \alpha \exp(\pm i\pi/2)$, σ_z toma valores ± 1 que corresponden a polarización circular y cero para polarización lineal.

Este análisis muestra finalmente que el factor de fase azimutal $\exp(im\varphi)$ es el responsable de un bien definido momento angular orbital de la luz.

Modos Laguerre–Gauss y Holografía

Contents

2.1. Modos Laguerre–Gauss	12
2.1.1. Factor de Fase Azimutal	14
2.2. Holograma Generado por Computador	15
2.2.1. Geometría de un haz que transporta MAO	18

Previamente se mostró que haces con una estructura o factor de fase $\exp(im\varphi)$ tienen un momento angular orbital bien definido m . El equivalente cuántico^{6,88} por su parte, muestra que como funciones de onda esta estructura corresponde a los autoestados de la componente z del momento angular con autovalor $m\hbar$. Ahora, el cociente entre el flujo de momento angular orbital y el flujo de energía en la ecuación 1.33 está dado por $\frac{m}{\omega}$ y sabiendo que la energía de un fotón está dado por $\hbar\omega$, puede inferirse que cada fotón del haz con factor de fase $\exp(im\varphi)$ transporta un momento angular orbital $m\hbar$. El momento angular orbital está relacionado con los vórtices ópticos ya que estos poseen el factor de fase azimutal y gracias a esta singularidad del campo óptico posee una región central de amplitud cero. A continuación se hará una descripción formal de uno de los tipos de haces que poseen factor de fase $\exp(im\varphi)$, ilustrando sus principales características.

2.1. Modos Laguerre–Gauss

Haces que transportan MAO surgen naturalmente como un conjunto completo de soluciones de la ecuación de onda bajo la aproximación paraxial en coordenadas cilíndricas³³⁹

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) U_{mp}^{LG} = 0, \quad (2.1)$$

con ρ como la coordenada radial, φ el ángulo azimutal y $k = \omega/c$ el número de onda del haz. Gracias a su simetría rotacional a lo largo del eje de propagación los haces *Laguerre–Gauss* constituyen la solución de la ecuación 2.1 y como en la mayoría de trabajos previos, servirán de guía experimental para generar haces con momento angular orbital. Este tipo de haces en su forma normalizada se pueden expresar como:

$$U_{mp}^{LG}(\rho, \varphi, z) = \frac{C_{mp}^{LG}}{\sqrt{\omega(z)}} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{\omega(z)} \right)^{|m|} L_p^m \left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \quad (2.2)$$

$$\times \exp(im\varphi) \exp[-i(2p + |m| + 1)\chi(z)] \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2R_c} \right].$$

Donde C_{mp}^{LG} son constantes de normalización, $L_p^{|m|}$ los polinomios generalizados de Laguerre, $\omega(z)$ es radio del haz, z_R es el rango de Rayleigh (o región focal), R_c el radio de curvatura del haz y χ el salto de fase en la región focal. Todos estos definidos a continuación:

$$C_{mp}^{LG} = \sqrt{2^{|m|+1}p! / [\pi(p + |m|)!]}$$

$$L_p^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{m+p}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega(z)^2 = \frac{2(z_R^2 + z^2)}{kz_R} = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right],$$

$$z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}, \quad R_c = z[1 + (\frac{z_R}{z})^2], \quad \chi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right).$$

El índice modal p , determina el número de anillos concéntricos del haz ($p + 1$)³²² y m el número de frentes de onda helicoidal entrelazadas de igual fase, la orientación de estas hélices está determinada por el signo de m . La forma más simple de un haz *Laguerre–Gauss* según el patrón de intensidad 2.2, ocurre cuando el índice $p = 0$. Este tipo de haces se denominan vórtices ópticos y serán la guía experimental de este proyecto de investigación.

Los modos *Laguerre–Gauss* forman un conjunto ortonormal respecto a los índices p cuando se integran sobre la coordenada radial ρ :

$$\int_0^\infty U_{mp}^{LG}(\rho, \varphi, z) [U_{mq}^{LG}(\rho, \varphi, z)]^* \rho d\rho = \delta_{pq}. \quad (2.3)$$

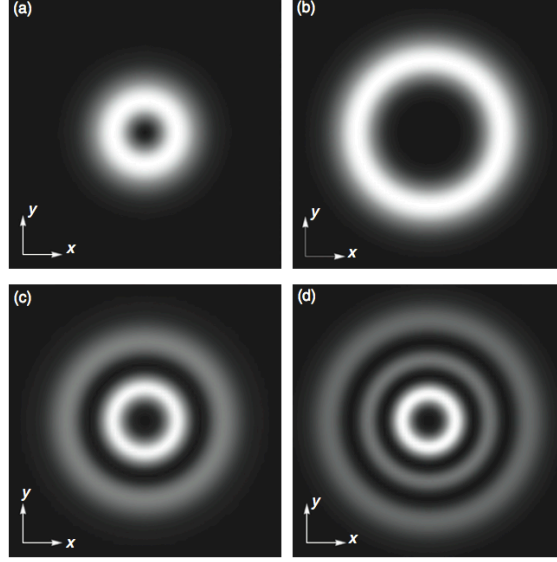


Figura 2.1: Perfil de intensidad de un haz Laguerre–Gauss. (a) $m=1$, $p=0$. (b) $m=5$, $p=0$. (c) $m=2$, $p=1$. (d) $m=2$, $p=2$,³²³.

Equivalentemente son ortogonales en el índice m cuando se integran sobre la variable azimutal φ . Incluso estos modos son ortogonales en ambos índices cuando la integración se realiza sobre el plano ρ y φ :

$$\int_0^2 \pi d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho U_{np}^{LG}(\rho, \varphi, z) [U_{mq}^{LG}(\rho, \varphi, z)]^* = \delta_{nm} \delta_{pq}. \quad (2.4)$$

2.1.1. Factor de Fase Azimutal

Haces de luz con un factor de fase de $\exp(im\varphi)$ tienen un vórtice óptico sobre el eje con una carga de vórtice o carga topológica m . Esto se puede ver más claramente a partir de la definición de la carga de vórtice, la cual se calcula mediante la integración de la fase a lo largo de una trayectoria cerrada alrededor de la singularidad³²⁴,

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint d\chi = \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{l} \cdot \nabla \chi, \quad (2.5)$$

donde $d\mathbf{l}$ es el elemento de línea. Para una fase azimutal $\chi = m\varphi$ esta integral arroja la carga del vórtice m . Podemos ver entonces, de acuerdo con la figura 2.2, que para un factor de fase azimutal $\exp(im\varphi)$, hay $|m|$ saltos en la fase en un círculo completo \mathbf{C} , es decir, $|m|$ número de frentes de onda helicoidal entrelazados o superficies de igual fase.

Estos resultados se pueden resumir de la siguiente forma: La carga topológica del haz es la responsable del momento angular orbital de los haces *Laguerre–Gauss* y su signo determina la dirección de giro de la hélices.

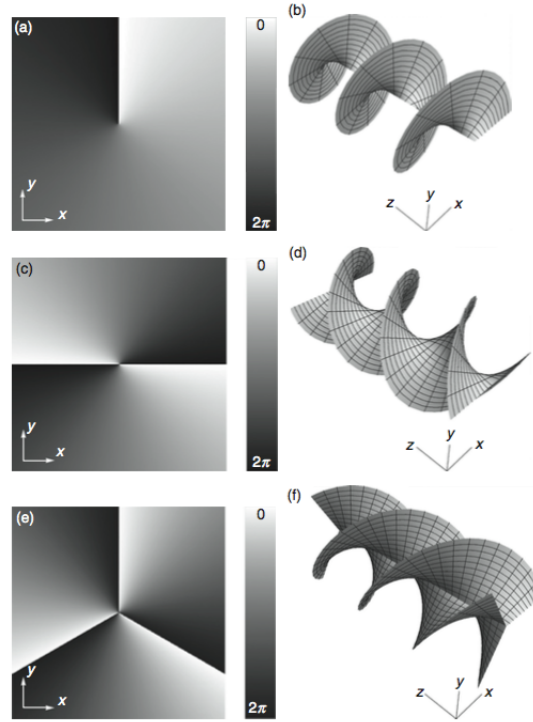


Figura 2.2: Estructura de fase asociada con el factor $\exp(im\varphi)$, (a,b) $m=1$, (c,d) $m=-2$ y (e,f) $m=3$ ³²³.

2.2. Holograma Generado por Computador

Antes de que se publicara el primer artículo sobre el MAO de la luz^{6,85} ya se construían haces con singularidad en la fase. Una singularidad en la fase es un punto en el campo óptico al rededor del cual, sobre un camino cerrado \mathbf{C} , la

fase cambia en 2π un número m de veces. En la figura 2.3 se puede observar su relación con el tipo de patrones de intensidad que se obtuvieron en este trabajo.

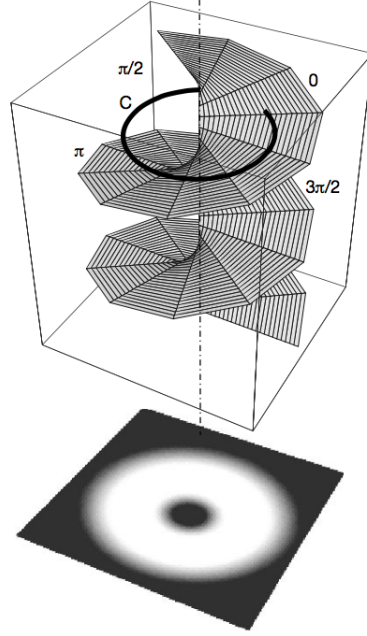


Figura 2.3: Frente de onda (arriba) y patrón de intensidad (abajo) del modo donut más simple, $LG_{1,0}$ ³²².

El método comúnmente utilizado para generar haces que transporten MAO es hacer pasar un haz Gaussiano a través de un Holograma. El holograma se simula mediante la interferencia entre dos haces, los cuales son regularmente una onda oblicua y el haz u objeto que se desea reproducir y que en este caso tendría una singularidad en la fase de la forma 2.2. El resultado es similar a la estructura de una rejilla de difracción tipo *Ronchi* con una bifurcación o defecto en la región central con forma de tenedor. El siguiente paso es transferir el holograma generado a un material con alto índice de reflexión o alto índice de transmisión como se muestra en la figura 2.4. Este último paso puede lograrse mediante diferentes técnicas siendo la resolución del holograma, la principal diferencia entre ellas. El resultado esperado en general son haces con singularidad en la fase, *Laguerre–Gauss*, bien definidos y altamente eficientes en relación con el primer orden de difracción⁸⁶.

Para iniciar el acercamiento experimental resulta conveniente escribir los modos *Laguerre–Gauss* como un producto de su amplitud radial $U_{mp}(\rho)$, primera línea de la ecuación 2.2, el factor de fase azimutal y el término de propagación

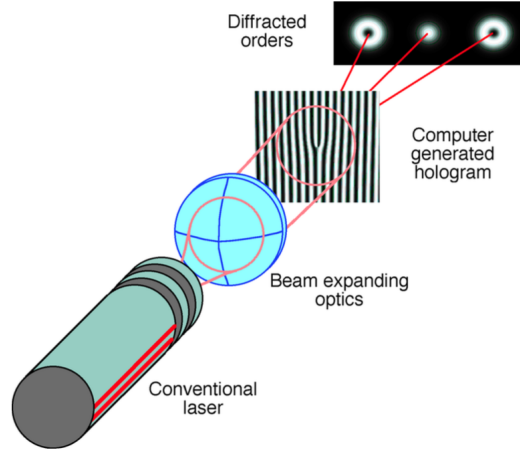


Figura 2.4: Uso de holograma generado por computador como rejilla para producir MAO en los órdenes ± 1 ⁸⁹.

que incluye la fase *Gouy*, así:

$$U_{mp}^{LG}(\rho, \varphi, z) = U_{mp}(\rho) e^{(im\varphi)} e^{[-i(2p+|m|+1)\chi(z)]} e^{\left[-ik\frac{\rho^2}{2R_c}\right]}. \quad (2.6)$$

Sin embargo, en este trabajo se adoptará la sugerencia de varios autores que simplifican aún más la expresión 2.6, conservando esencialmente el factor de fase de la siguiente manera^{84,86,87,208}:

$$E(\rho, \varphi, z) = E_0 \exp(im\varphi) \exp(-ikz), \quad (2.7)$$

donde m es la carga topológica de la singularidad y $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ es el ángulo medido en el plano transversal a la dirección de propagación. La interferencia entre la onda de la ecuación 2.7 y una onda oblicua uniforme propagándose a lo largo de una dirección relativa θ con respecto al eje de propagación z , $u = u_0 \exp[i(k_z z + k_x x)]$, con k como la frecuencia espacial, permite obtener la configuración de la rejilla de difracción, en el plano $z = 0$, conocida como la función H del holograma⁸⁶:

$$H(x, y) = u_0^2 + E_0^2 + 2E_0 u_0 \cos(kx - m\varphi). \quad (2.8)$$

2.2.1. Geometría de un haz que transporta MAO

Para predecir las propiedades geométricas de un vórtice óptico generado mediante un haz Gaussiano y un HGC en forma de tenedor, se conocen dos métodos. En el primero se plantea lo siguiente: Cuando un haz coherente, pasa a través de una abertura lo suficientemente pequeña el patrón de difracción en la región lejana (Difracción de *Fraunhofer*)^{87,207} es proporcional a la transformada de *Fourier* \mathcal{F} del producto entre la abertura H y el haz incidente ψ_G , donde k_x es la componente x del vector de onda de la onda inclinada.

$$I = \mathcal{F} \{ \psi_G H \} = \mathcal{F} \left\{ e^{-(r^2/w^2)} [u_0^2 + E_0^2 + 2E_0 u_0 \cos(kx - m\varphi)] \right\}. \quad (2.9)$$

Para el segundo método se analiza la desviación estándar de la distribución espacial de un haz o su divergencia^{54,59,116}, el cual posee una distribución de intensidad para el modo radial de orden más bajo ($p = 0$) escrito en la forma

$$I_{lp}^{LG}(\rho, \varphi, z) = \frac{2}{w(z)^2 \pi |l|!} \left\{ \frac{2\rho}{w(z)} \right\}^{2|l|} \exp \left\{ \frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right\}. \quad (2.10)$$

La evolución geométrica de los vórtices ópticos se plantea a manera de monografía en este trabajo y su análisis experimental será abordado en próximos estudios.

Generación y Medición de Vórtices Ópticos

Contents

3.1. Modulador Espacial de Luz	20
3.1.1. Vórtices Mediante el Modulador Espacial de Luz . . .	21
3.2. Película Fotográfica	23
3.2.1. Vórtices mediante negativo fotográfico	28
3.2.1.1. Vórtice a través de abertura anular circular. .	33

Para generar haces que transportan momento angular orbital se hicieron exploraciones mediante la elaboración empírica de axicones y placas con fase en espiral, ambos en acrílico y vidrio pirex, sin embargo, los resultados no cumplieron las expectativas del proyecto. Posteriormente se abordó, por la efectividad de los resultados según la literatura, la técnica de holografía mediante modulador espacial de luz para generar vórtices ópticos. Gracias a la experiencia adquirida, la emulación de la técnica holográfica se aplicó esta vez sobre negativo fotográfico Kodalith mediante fotografía analógica. Debe aclararse que esta técnica fotográfica ha sido implementada anteriormente⁸⁷ en la generación de vórtices ópticos utilizando película fotográfica blanco y negro tradicional.

Antes de continuar con la descripción del montaje experimental y los resultados del proyecto, puede resultar útil para el lector observar previamente cómo un placa dieléctrica, conocido como placa de fase en espiral¹⁵², de índice de refracción, n , cuyo espesor incrementa con el ángulo azimutal de la forma $\delta h = \phi(n-1)\frac{l\lambda}{2\pi}$, al ser iluminado con una onda *Gaussiana* otorga a la onda transmitida un término de fase $\exp(im\varphi)$. Término capaz de producir un vórtice óptico tal y como se observa en la siguiente figura 3.1.

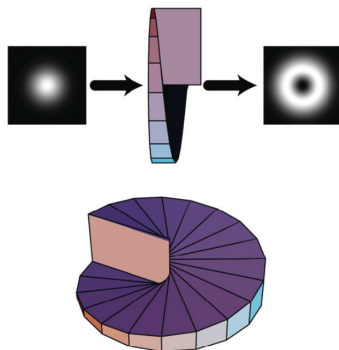


Figura 3.1: Vórtice generado por una placa óptica que atribuye a un haz *Gaussiano* una fase de la forma $\exp(im\varphi)$ ¹²⁹.

3.1. Modulador Espacial de Luz

Como es sabido, en sistemas ópticos coherentes la información está contenida en la amplitud y en la fase de las ondas y sus valores en cada plano perpendicular al eje de propagación determina el modo en que el haz se propaga. Aquellos dispositivos capaces de ejercer control sobre estos parámetros se conocen como moduladores espaciales de luz, los cuales pueden trabajar en amplitud o en fase.

Un MEL está compuesto por una matriz de píxeles que se pueden ajustar individualmente para modular el haz incidente. El tamaño de cada pixel varía dependiendo del fabricante y pueden encontrarse entre (10-40) μm ²⁴⁰. Gracias a que el material básico de un MEL es cristal líquido, por sus propiedades de anisotropía óptica y respuesta eléctrica, estos dispositivos pueden ser acondicionados para recibir una señal de vídeo y servir de *microdisplays* para máquinas de computo¹.

El HGC de la ecuación 2.8 fue simulado mediante el software *Matlab* (The MathWorks, Inc) utilizando el algoritmo que acompaña el MEL, (para consultar características técnicas y el algoritmo usado ver apéndice B). En la siguiente figura 3.2 se pueden observar dos hologramas para valores fijos de tamaño de la malla, separación entre franjas y con carga de vórtice $m = 4$ y $m = 5$ respectivamente. Estos hologramas están diseñados en escala de grises y carecen de simetría sobre el eje vertical.

¹Trabajo adelantado en el laboratorio del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, GOTS, de la Universidad Industrial de Santander

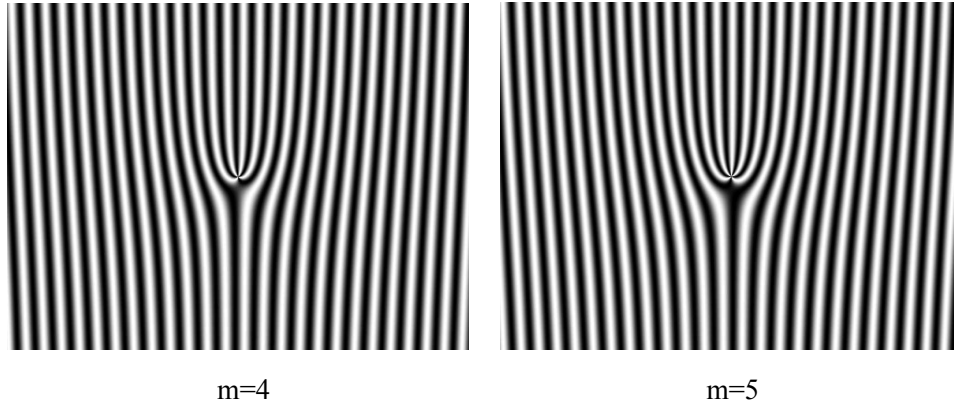


Figura 3.2: Hologramas con carga de vórtice $m = 4$ y $m = 5$, mediante la ecuación 2.8.

Cuando un HGC de este tipo se adapta al arreglo óptico de la fig. 3.3 es posible analizar el comportamiento del haz transmitido en la región del campo lejano. La fuente S , un láser de diodo (Holoeye, $\lambda = 532$ nm, $P_{max} = 15$ mW) emite un haz que pasa a través de un polarizador $P1$ el cual garantiza polarización lineal y descarta efectos de MAO de espín antes de encontrarse con el MEL y luego transmitirse a un segundo polarizador $P2$ que hace las veces de analizador y optimiza la operación de la matriz. Este arreglo experimental se utiliza para registrar la intensidad de los vórtices y en su conjunto, P1-MEL-P2 se considera normalmente como un elemento óptico difractivo.

El patrón de intensidad obtenido para este caso corresponde a $\pm n$ ordenes de difracción en un arreglo rectangular tal y como se observa en la figura C.1 para difracción en campo lejano.

3.1.1. Vórtices Mediante el Modulador Espacial de Luz

De todos los órdenes de difracción generados por el método anterior se analizará el primero $n = +1$, por razones de eficiencia^{208,344}, aquel que se encuentra contiguo a la derecha del haz central de mayor intensidad de la figura C.1, orden de difracción al cual corresponde una cantidad de MAO positiva igual a $m\hbar$. Los vórtices obtenidos para cargas topológicas $m = 0, 1, 2, \dots, 11$ se presentan en la figura 3.4

La confirmación de la carga topológica de cada vórtice o equivalentemente el momento angular orbital por fotón que transporta se puede revelar mediante un interferómetro *Mach-Zehnder*. El montaje experimental utilizado, el cual

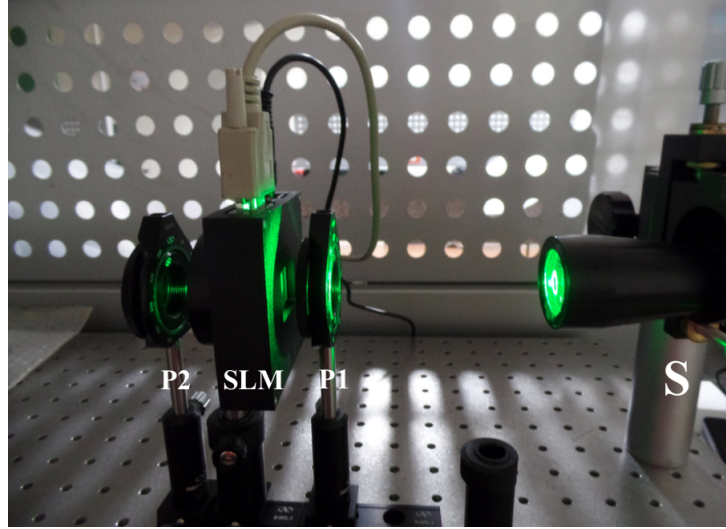


Figura 3.3: Montaje experimental para el MEL: arreglo de polarizador P1, MEL y polarizador P2 que actúa como analizador.

requiere ajuste geométrico para nada trivial, se puede apreciar en la figura 3.5.

La fuente láser S , emite un haz linealmente polarizado cuyo tamaño de spot puede limitarse mediante un iris ajustable I antes de pasar a través de un Beam splitter, $BS1$, no polarizable que lo divide en dos. Uno de estos haces viaja colineal al haz incidente y se difracta en el HGC del modulador espacial de luz MEL , ubicado de tal forma que mediante una precisa reflexión en el espejo $M1$ (de rugosidad $\lambda/10$), sólo el primer orden de difracción llegue al segundo BS . En su lugar, el haz transversal respecto al haz incidente recorre el otro brazo del interferómetro reflejándose en $M2$ antes de llegar al polarizador P que compensa la pérdida de intensidad ocurrida en el otro brazo, donde se encuentra el MEL. Así, los dos haces se encuentran nuevamente en la interfase del segundo $BS2$ para obtener sobre la cámara CCD el patrón de interferencia característico³⁴⁵ entre una onda Gaussiana y un haz que transporta MAO $m\hbar$.

A partir de este interferograma entre onda Gaussiana y vórtice óptico puede medirse la carga topológica del frente de fase helicoidal. Normalmente esta se determina contando el número de dientes del tenedor en una curva cerrada C que envuelve la bifurcación empezando desde cero²³². Variando el parámetro m del HGC se pueden obtener las diferentes bifurcaciones en intensidad mediante montaje de la figura 3.5. Las imágenes obtenidas en 3.6 reproducen la geometría del HGC utilizado.

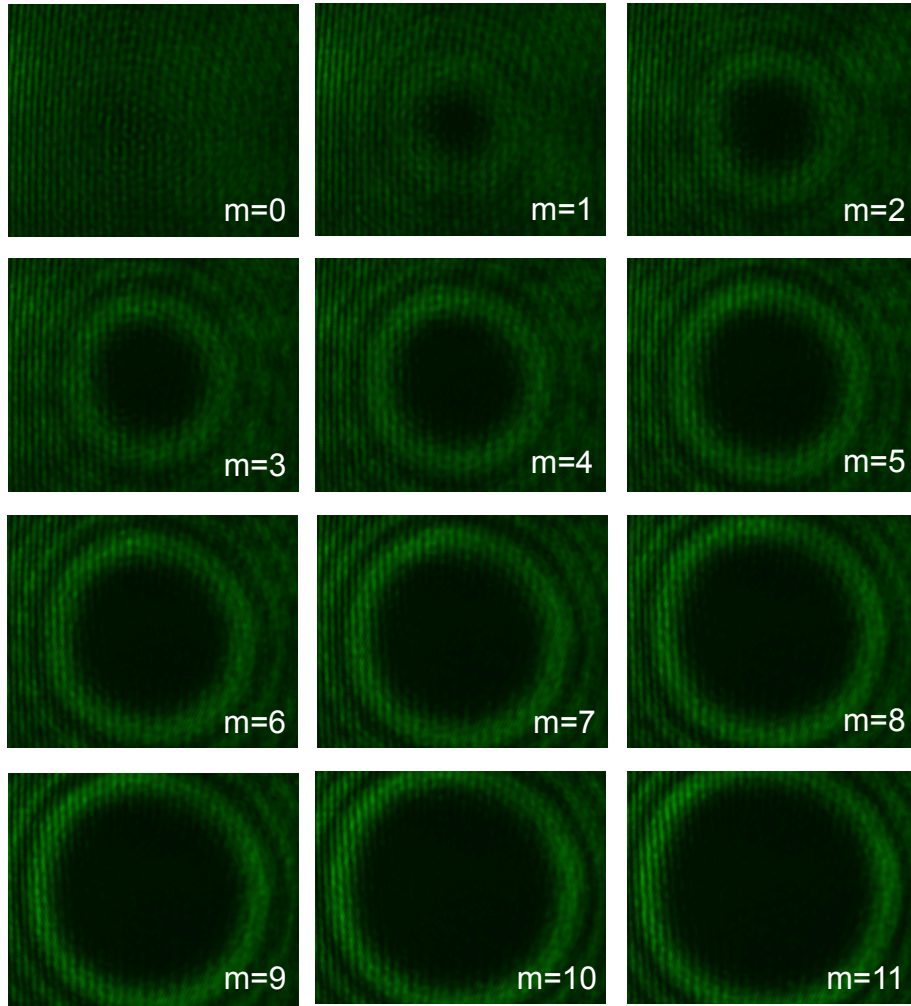


Figura 3.4: Vórtices ópticos con MAO $m\hbar$, para diferentes valores de carga topológica m , a partir de la ecuación 2.8.

3.2. Película Fotográfica

Desde el punto de vista físico el proceso fotográfico corresponde en cada una de sus etapas a un problema cuántico de muchas partículas y desentrañarlo puede ser la tarea de un proyecto de investigación en sí mismo. Sin embargo, de forma general se puede decir que el proceso fotográfico comprende las siguientes etapas, primero, la etapa de *detección*, donde la luz incide sobre la película, una lámina de acetato de celulosa recubierta por una emulsión acuosa con haluros de plata, material fotosensible (AgI, AgCl, AgBr). De la concentración y tamaño de estas sales dependen las características de la película, valores difícilmente reportados por el fabricante, como ejemplo observe

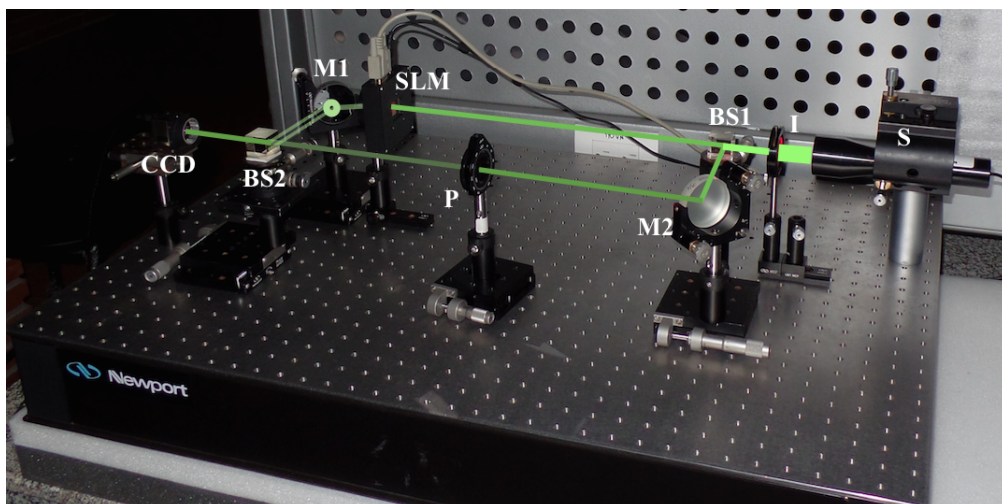


Figura 3.5: Interferómetro *Mach–Zehnder* para medir el MAO de un haz con frente de fase helicoidal, constituido por una fuente láser S, un iris ajustable I, divisores de haz BS1 y BS2, un modulador espacial de luz, aquí SLM, espejos planos M1 y M2, un polarizador P y una cámara CCD.

la figura 3.7 con cristales de tamaño promedio $(2-3) \mu m$. Segundo, la formación de la *imagen latente*, nombre que recibe el obscurecimiento tenue de la emulsión por el hecho de que los fotones incidentes desprenden átomos de plata que forman clusters entre los cristales de sal. Tercero, la *formación de la imagen* por amplificación química de los clusters o centros de formación de imagen durante el proceso de revelado, haciendo pasar la película por una solución rica en átomos de plata con concentración, tiempo de exposición y temperatura recomendados por el fabricante. Después del baño con el revelador la formación de clusters de átomos de plata se detiene mediante un baño ácido acético y finalmente se remueven las sales de plata disponibles mediante una lavado con una sustancia conocida como fijador. Para una descripción más detallada del proceso consultar las referencias asociadas^{347–351}.

A continuación se describirán los detalles del método implementado que luego de adelantar varias pruebas ofreció los mejores resultados en la generación de vórtices ópticos mediante negativo fotográfico². La idea básica en este caso consistió en optimizar el código del apéndice B según técnica nanofotolitografía²³⁷, binarizar el holograma y trasladar un nuevo HGC de alta resolución en papel a una película fotográfica blanco y negro.

²Trabajo realizado en el laboratorio de Óptica Cuántica, GOCUV, de la Universidad del Valle.

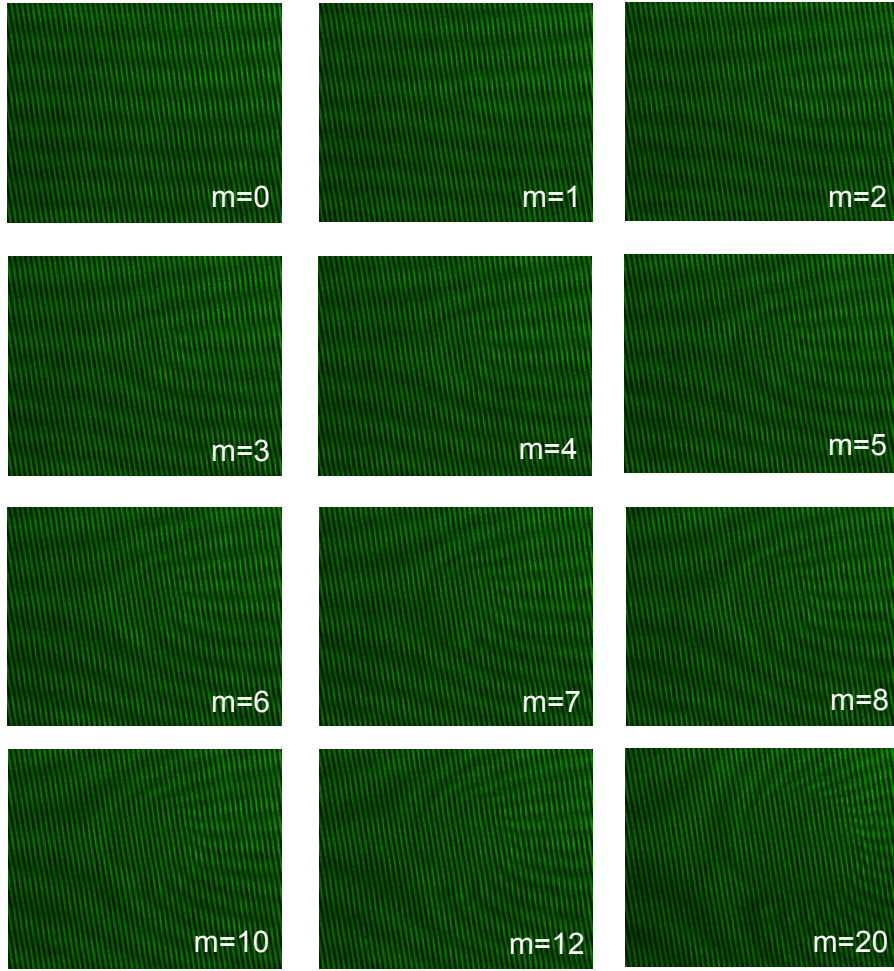


Figura 3.6: Interferogramas entre haz Gaussiano y vórtices ópticos con diferentes valores de carga topológica m .

En este caso, la función H del holograma anterior 2.8 se puede reescribir como:

$$H(r, \varphi) = E_0^2 + u_0^2 + 2E_0u_0\cos(m\varphi - k_x r \cos\theta + \phi_0) \quad (3.1)$$

donde $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + n\pi$, con n tomando valores de la siguiente manera,

$$n = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 2 & \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

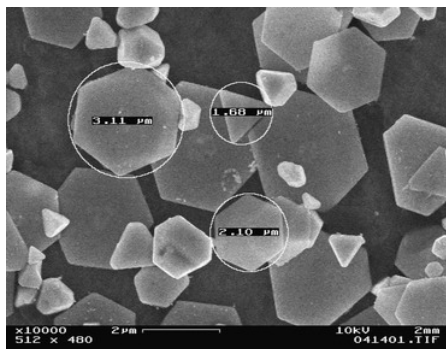


Figura 3.7: Haluros de plata de un negativo fotográfico visto mediante microscopio electrónico, película Kodak Tmax400³⁵².

para mantener a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. El proceso de optimización del algoritmo permitió observar que la función H se puede hacer simétrica respecto al eje vertical a partir del valor de ϕ_0 , cambiándolo de una fase arbitraria²³⁷ por una función lineal de m .

A continuación las imágenes son binarizadas adicionando al código del holograma una rutina basada en el método Thresholding³⁴⁶, en el cual la imagen se segmenta y en cada bloque se compara el nivel de gris de cada píxel con un cierto valor umbral preestablecido, es decir sometiendo la imagen a la condición:

$$H(r, \varphi) = \begin{cases} 0 & H(r, \varphi) < \frac{1}{2} \\ 1 & H(r, \varphi) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aunque este método requiere enormes tiempos de computo con una máquina estándar, para el método de producción de vórtices que se está implementando se favorece el contorno de los hologramas obtenidos como puede notarse en la figura 3.8.

Cada holograma generado de 16002x12004 píxeles a una resolución de 1000 ppp se imprimió en papel opalina lisa con densidad 250 g/cm², en una impresora láser de resolución máxima 1200 ppp. Estos hologramas ubicados sobre un fondo blanco y plano y a una distancia $d = 470$ cm fueron fotografiados

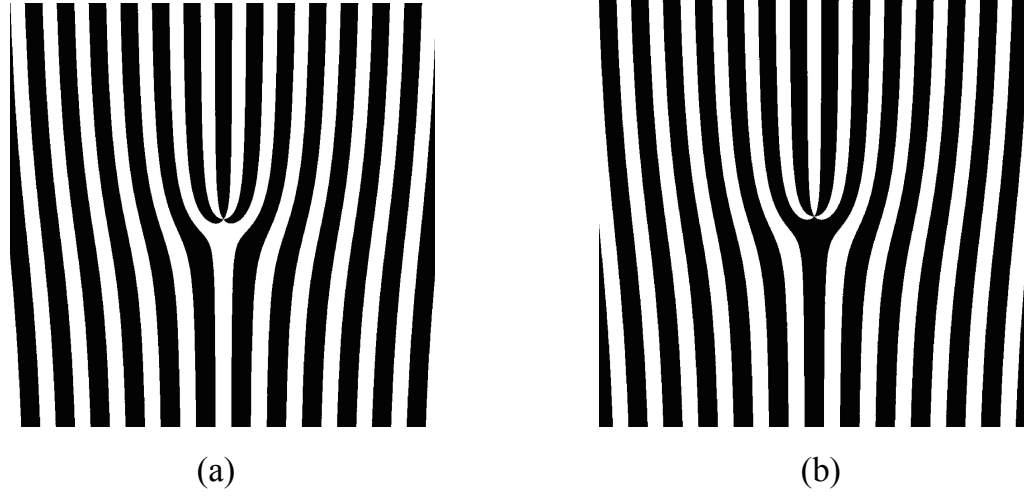


Figura 3.8: Versión aumentada de Hologramas binarizados 3.1 (a) HGC $m = 3$ binarizado y b) HGC $m = 3$ binarizado con inversión de color.

con cámara analógica Nikkormat y lente de distancia focal $f = 50$ mm. La película blanco y negro que mejor resultado ofreció fue una de uso profesional de alto contraste, Kodalith Ortho Films 6556 Type 3, con un tamaño de grano ASA12. Parámetros adicionales como abertura de diafragma y velocidad de obturación se ajustaron con un fotómetro convencional. El proceso de revelado se adelantó siguiendo las recomendaciones del fabricante y detalles técnicos adicionales^{353–355}. La ficha técnica de la película y condiciones de seguridad de cada una de las sustancias utilizadas puede consultarse en las referencias asociadas^{356–358}. El resultado final son negativos fotográficos con la imagen de los hologramas para diferente carga topológica. La representación gráfica de este procedimiento y su resultado se puede observar en la figura A.1.

De acuerdo con el esquema de la figura 3.9 es posible estimar la distancia de separación entre rendijas del holograma en el negativo fotográfico d_f a partir de la distancia de separación entre rendijas del holograma en papel $d_p = 3$ mm, la distancia focal de la lente $f = 50$ mm y la distancia entre la cámara y los hologramas en papel $d = 470$ cm, mediante la relación 3.2.

$$d_f = \frac{d_p f}{d} \approx 25 \mu m \quad (3.2)$$

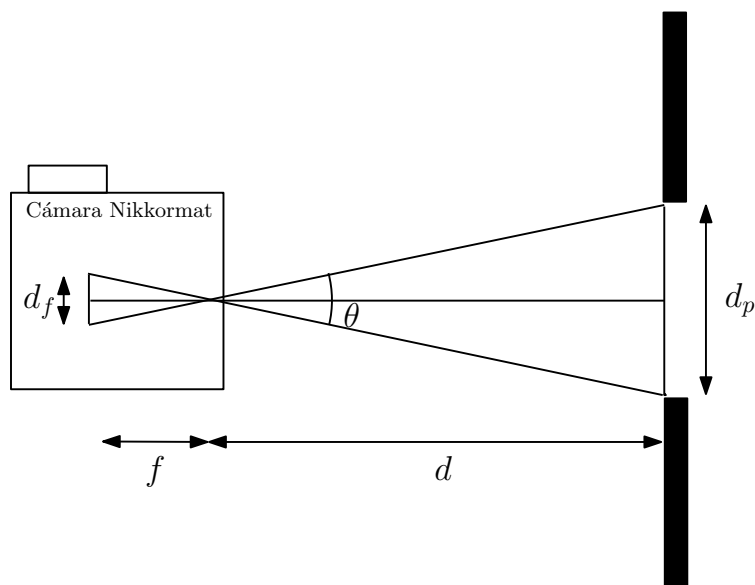


Figura 3.9: Diagrama para estimar la separación entre rendijas sobre el negativo fotográfico d_f , fotografiando desde una distancia d con una cámara de distancia focal f , un holograma objeto con rendijas separadas una distancia d_p .

En la figura 3.10 se confirma la estimación anterior para d_f después de su calibración (siendo d y d_p fijos y m variable), mediante microscopio óptico, MO.

3.2.1. Vórtices mediante negativo fotográfico

Para obtener los diagramas de difracción del haz Gaussiano en campo lejano, en este caso se utilizó como fuente un láser de Helio-Neón $\lambda = 632 \text{ nm}$, con Pmax de 25 mW y un perfil de intensidad, capturado con una cámara CCD (Spiricon SP620U) 1600x1200 píxeles, como se observa en la figura D.1.

Una fuente láser S emite una haz linealmente polarizado que se hace pasar por un filtro espacial para reducir el ruido debido a la alta frecuencia espacial. Este paso realiza mediante la transformada de Fourier del haz incidente y genera una reducción considerable de su intensidad. Un iris ajustable I separa la región central del haz antes de que pase por una lente plano-convexa $L1$ y luego al Beam splitter, $BS1$, no polarizable que lo divide en dos. Uno de estos haces viaja colineal al haz incidente y se difracta en el HGC de la película fotográfica H_f , ubicado de tal forma que mediante una precisa reflexión en

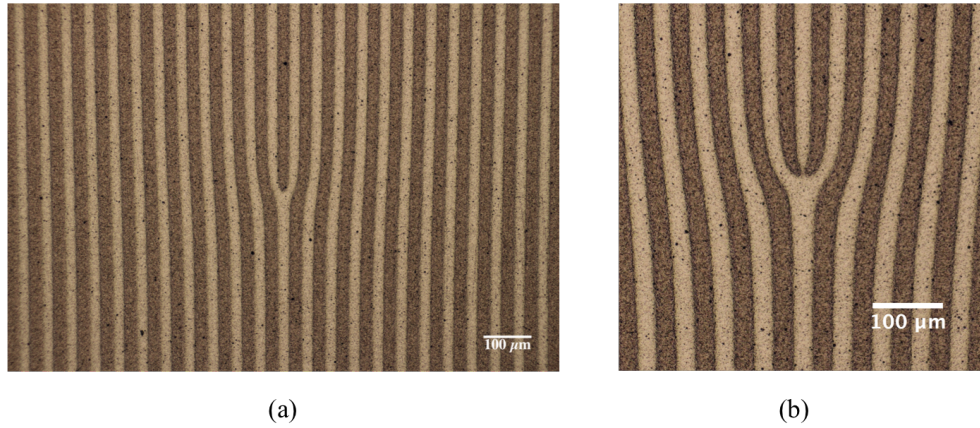


Figura 3.10: Negativo fotográfico de 35 mm frente a microscopio óptico para (a) $m = 1$, (5X) y (b) $m = 2$, (10X).

el espejo $M1$ sólo el primer orden de difracción llega al segundo $BS2$. En la otra dirección el segundo haz se hace pasar por un polarizador compensador P antes de reflejarse en $M2$ y encontrarse con el primer haz en la interfase del segundo $BS2$. Finalmente sobre la cámara CCD se registran los patrones de interferencia respectivos. Los interferogramas entre vórtice óptico y haz Gaussiano de referencia se obtienen mediante el montaje de la figura 3.12.

En la figura D.2 se pueden observar perfiles de ajuste del interferómetro *Mach – Zehnder* para dos casos de interferencia, primero, con onda Gaussiana y segundo, con onda Gaussiana y onda esférica.

La ubicación de los hologramas H_f en un montaje para difracción de campo lejano según la figura 2.4 permite obtener los vórtices ópticos agrupados en la figura 3.11.

La simetría asociada a los hologramas sobre película fotográfica permite determinar por interferometría con onda Gaussiana carga de vórtice mediante el conteo del número de franjas oscuras al interior del tenedor o bifurcación principal según se describe en el anexo la figura E.1.

Por otro lado, con estas modificaciones se observa que los órdenes de difracción pasaron de distribuirse en un plano de números enteros para el modulador como en la figura C.1 a una línea recta, $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en el caso fotográfico. Este fenómeno posiblemente se deba a la pixelación del modulador, sin embargo, se espera aclarar esta situación cuando se proyecten los hologramas binarizados sobre un modulador espacial de luz.

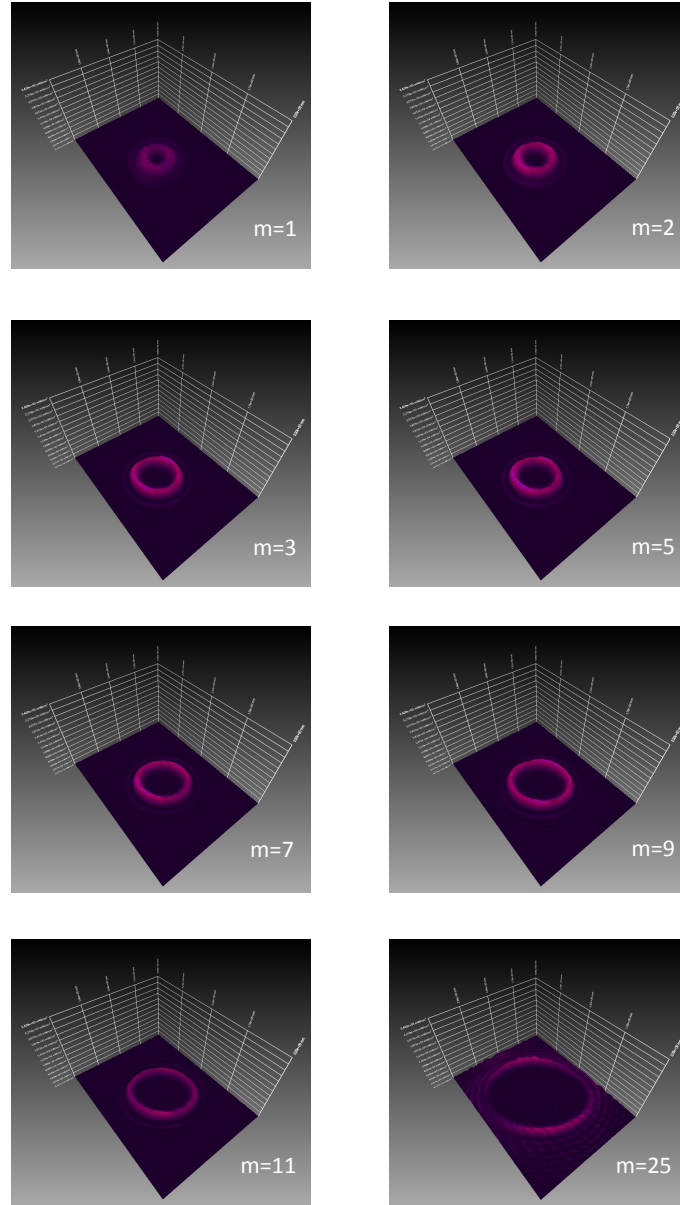


Figura 3.11: Vórtices ópticos mediante película fotográfica para diferentes valores de m de la función 3.1.

Aunque para el caso de interferencia entre vórtice y onda Gaussiana se muestran los resultados similares a los obtenidos mediante MEL, en este caso se puede apreciar mayor definición en los interferogramas, tal y como se observa en la figura 3.13.

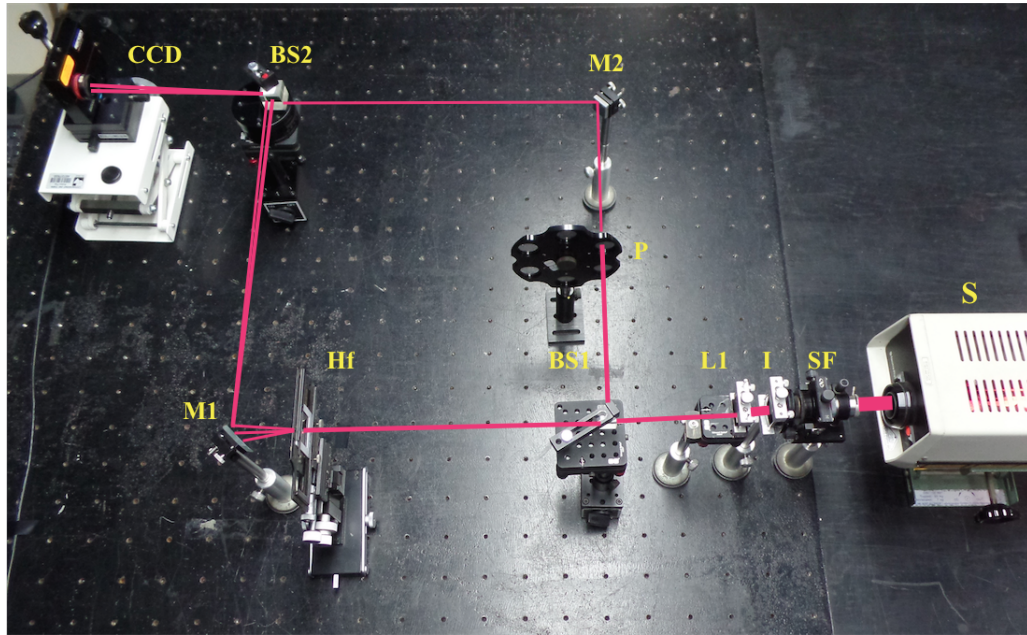


Figura 3.12: Interferómetro *Mach – Zehnder* para medir el MAO de un haz con frente de fase helicoidal, constituido por una fuente láser S, un iris ajustable I, un filtro espacial SF, divisores de haz BS1 y BS2, un holograma fotográfico Hf, espejos planos M1 y M2, un polarizador P y una cámara CCD.

Como puede notarse de la expresión calculada para d_f , es posible reducir la distancia de separación entre rendijas sobre el holograma logrando separar aún más los vórtices, a partir del control de los otros dos parámetros d y f .

Para esta misma técnica se implementó adicionalmente interferometría entre vórtice óptico y onda esférica. El montaje experimental es prácticamente el mismo de la figura 3.12 a diferencia de ubicar una segunda lente, plano-convexa $L2$, sobre el brazo de referencia del interferómetro. La carga topológica del vórtice se determina contando el número de espirales entrelazadas de los patrones obtenidos en la figura 3.14, la cual recoge los resultados experimentales más llamativos de este trabajo. Se recomienda observar la cercanía de estos resultados con los reportados en trabajos previos^{87,237,361,362}.

Aunque en este momento los acetatos grabados con hologramas en forma de tenedor podrían ser de gran ayuda a nivel pedagógico, la estandarización de la técnica de HGC grabado sobre película fotográfica puede ofrecer un método real para hacer investigación sobre aplicaciones del momento angular orbital

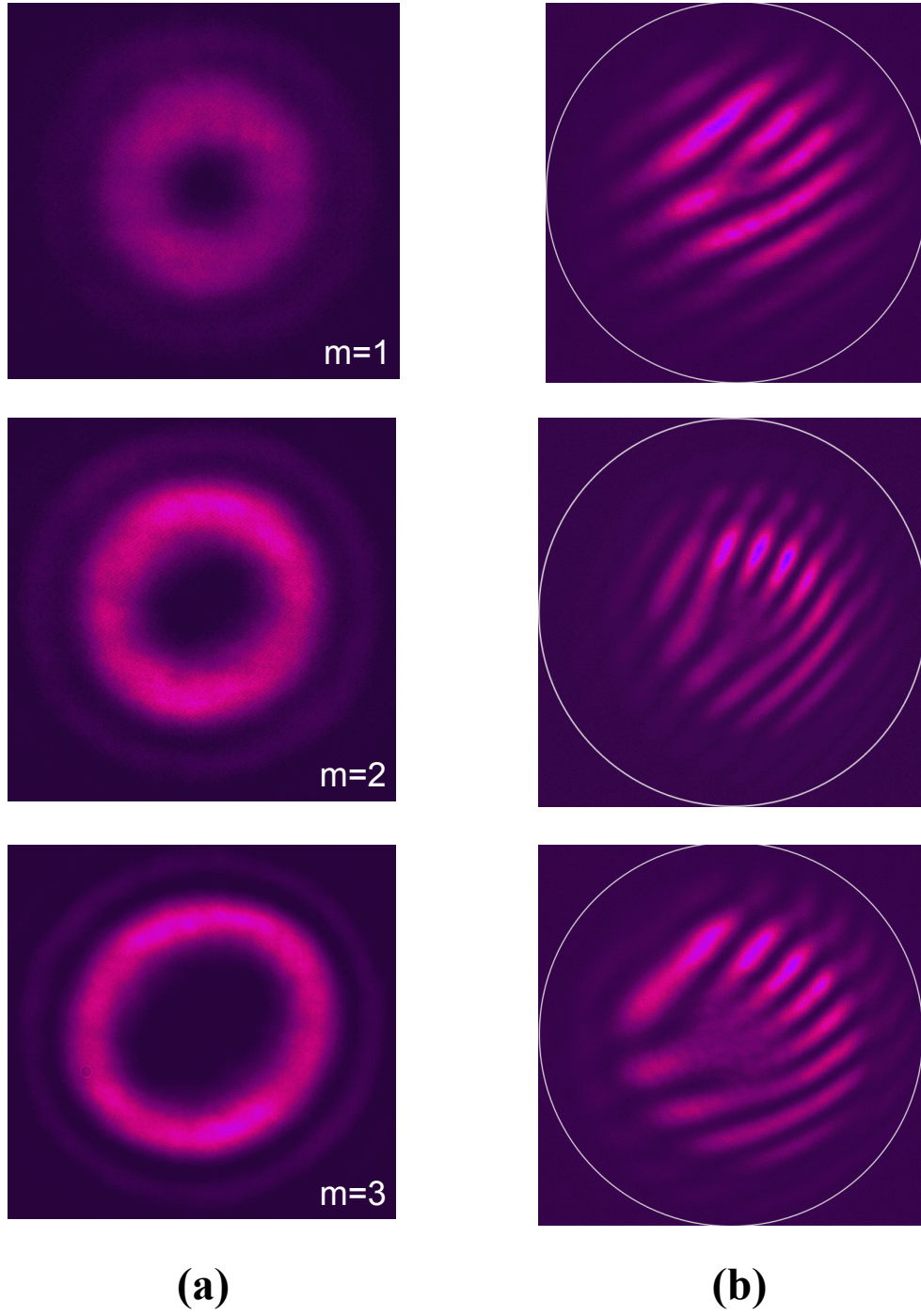


Figura 3.13: Vórtices ópticos con H_f de la ecuación 3.1. (a) $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$ y sus respectivos patrones de interferencia con onda Gaussiana (b) .

de la luz cuando, por dificultades instrumentales, no se dispone de otra tecnica para generarlos.

3.2.1.1. Vórtice a través de abertura anular circular.

Aberturas ópticas de diferentes formas, triangular equilátera, hexagonal, cuadrada entre otras^{275,359,360} han sido propuestas para determinar experimentalmente la carga topológica de un vórtice óptico tratando de evitar el, para nada trivial, ajuste interferométrico. Como resultado adicional de este proyecto de investigación y preambulo de una investigación que se encuentra en marcha, se muestran algunas imágenes del fenómeno de difracción entre un vórtice óptico y una abertura anular circular en forma de anillo, con dimensiones comparables entre sí.

Para su fabricación, la abertura anular circular fue simulada en *Matlab* (The MathWorks, Inc), siguiendo el mismo proceso de binarización, impresión en papel y grabado fotográfico descrito anteriormente, obteniendo sobre el acetato de alto contraste la imagen de la figura F.1.

Cuando los vórtices ópticos generados se transmiten a través de una misma abertura anular circular se aprecia una ligera variación de la distribución de intensidad de acuerdo con la primer columna de la figura 3.15. Si posteriormente los vórtices filtrados se hacen interferir uno a uno con una onda esférica, mediante el montaje presentado anteriormente en 3.12, se obtienen imágenes interferométricas entre vórtice y onda esférica de mayor contraste que las ya presentadas en los resultados de la figura 3.14, tal y como puede observarse en la segunda columna de la figura 3.15. Como puede notarse de estas imagenes interferométricas, la carga topológica del vórtice filtrado no se vé alterada, logrando mejores imágenes en intensidad para los espirales obtenidas.

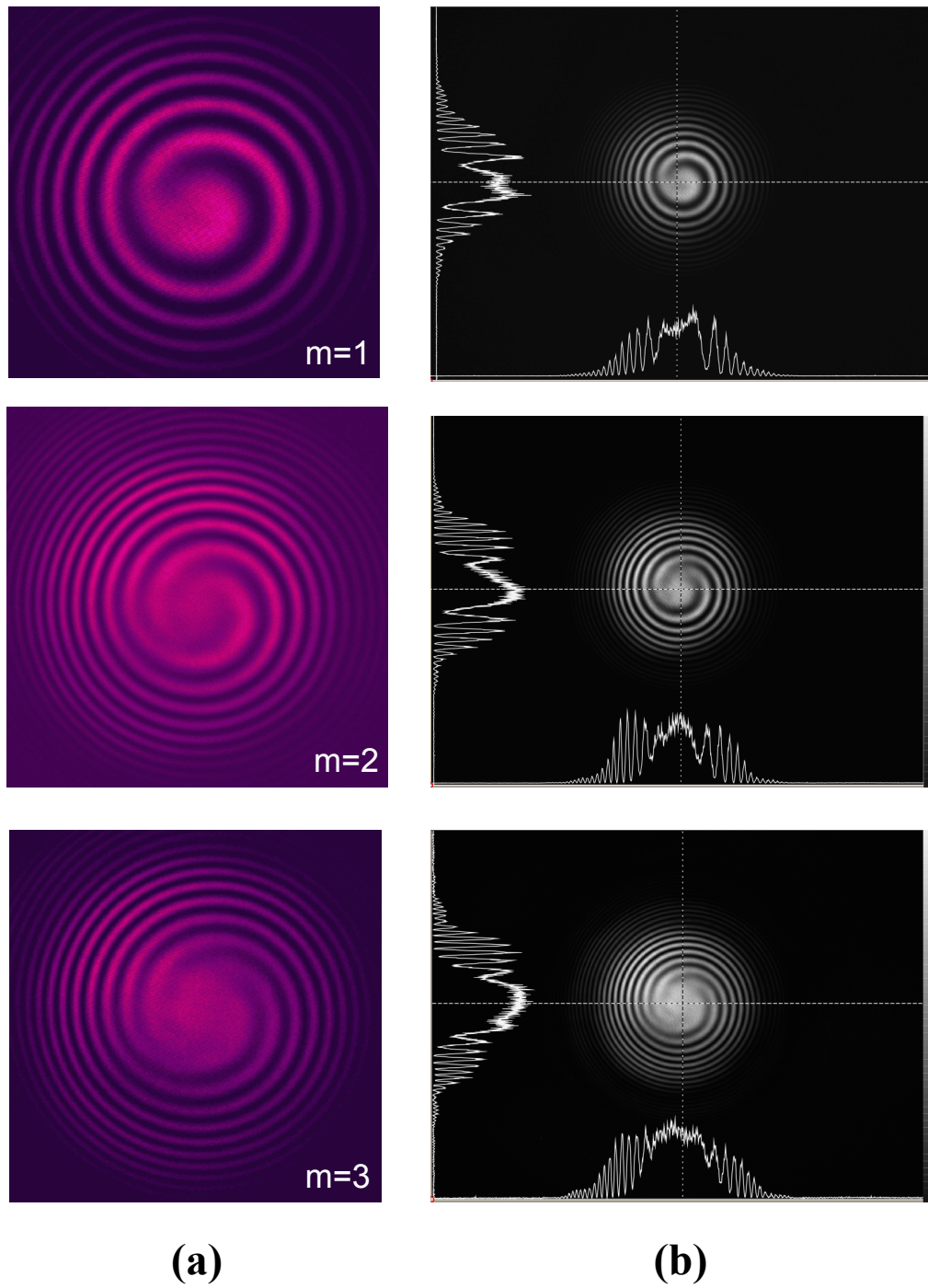


Figura 3.14: Patrones de interferencia de vórtices ópticos, H_f de la ecuación 3.1 y onda esférica de referencia (a) y sus respectivos perfiles de intensidad (b).

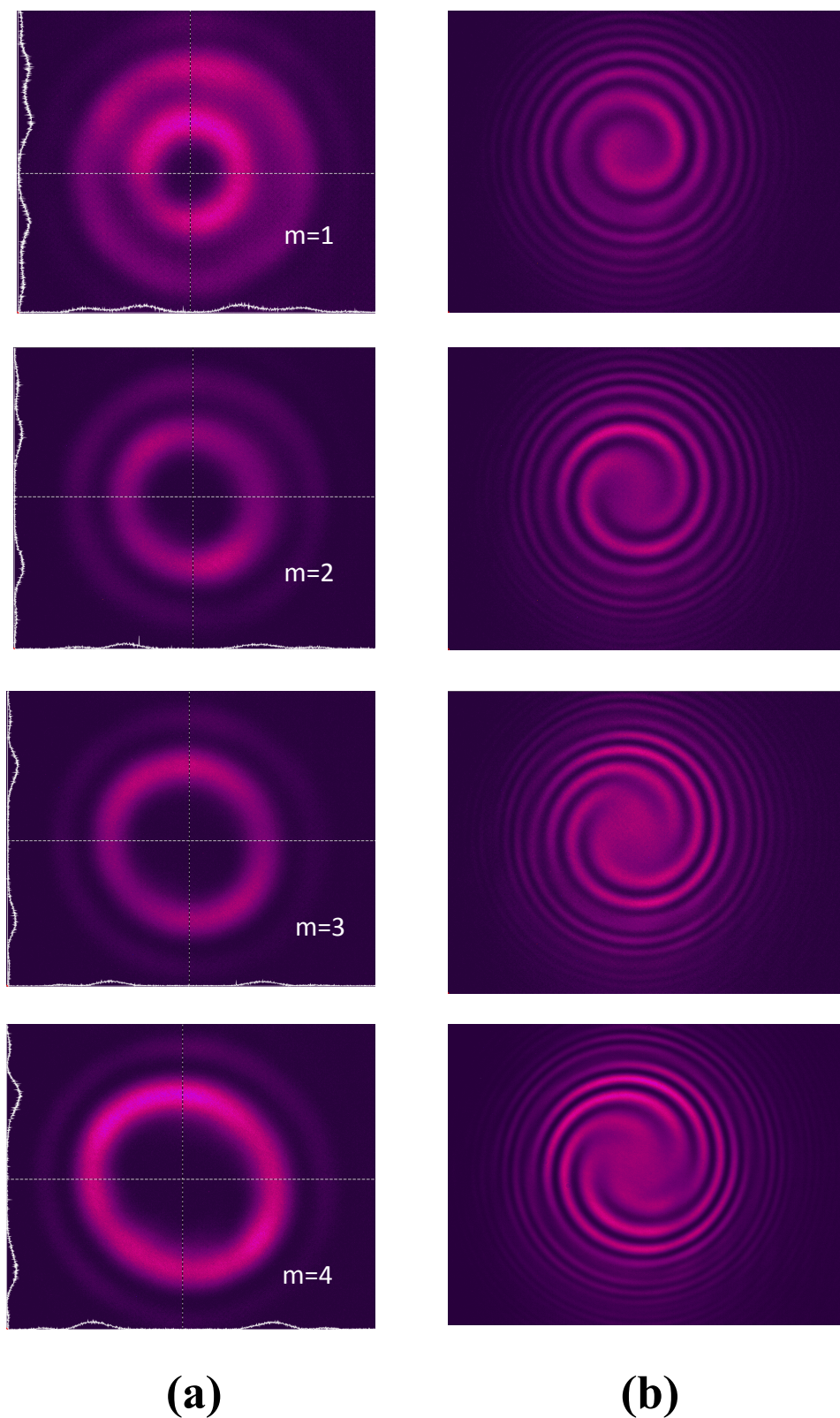


Figura 3.15: Vórtices ópticos de diferentes valores de m filtrados mediante la apertura anular circular F.1 (a) y sus respectivos patrones de interferencia con onda esférica.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

Las propiedades mecánicas del campo electromagnético permiten obtener constructivamente las leyes de conservación del momento angular total de la luz y expresar el momento angular y el flujo de momento angular del campo en términos de sus componentes orbital y de espín.

El factor de fase azimutal $\exp(im\phi)$ transporta un bien definido momento angular orbital y de esta manera se puede lograr una correspondencia entre la carga topológica como característica geométrica del vórtice óptico y el momento angular orbital de la luz.

El trabajo experimental con holografía permitió generar vórtices ópticos como una versión simplificada de modos Laguerre-Gauss. Los resultados obtenidos mediante ambas técnicas, MEL y negativo fotográfico reprodujeron resultados de diferentes autores.

La confirmación de la carga topológica o equivalentemente el momento angular orbital transportado por un vórtice óptico se determinó cuantitativamente por interferometría de alta precisión como lo hacen otros autores, para ambas técnicas holográficas, el modulador espacial de luz y el negativo fotográfico.

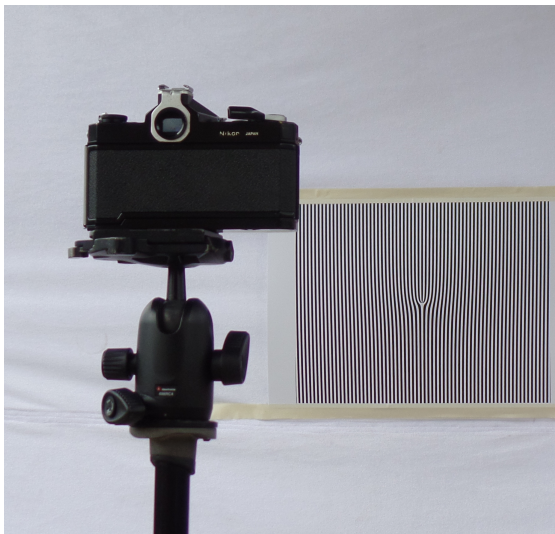
A diferencia de la holografía mediante modulador espacial de luz, la portabilidad del holograma sobre negativo fotográfico promete ser un elemento de uso pedagógico para la introducción del momento angular orbital de la luz.

Gracias a los resultados obtenidos, la estandarización de la técnica holografía sobre negativo fotográfico se proyecta como una alternativa para investigar aplicaciones con vórtices ópticos en la Universidad del Valle.

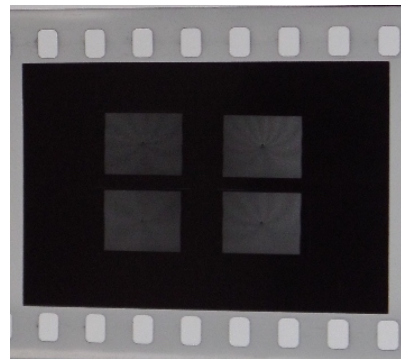
La conservación de la carga topológica de un vórtice óptico al pasar por una abertura anular circular permite intuir la posibilidad de transmitir pulsos de este tipo a través de fibras ópticas con la misma sección transversal en el núcleo.

APÉNDICE A

Montaje para grabado de Hologramas



(a)



(b)

Figura A.1: Montaje experimental para fotografiado de hologramas en papel(a) y resultado en negativo fotográfico de 35 mm (b).

Código para HGC mediante MEL

Código en *Matlab* (The MathWorks, Inc) para la creación de holograma tenedor en escala de gris según la figura 3.2.

El modulador espacial de luz utilizado fue un LC 2002 Transmissive 800(H) \times 600(V), con tamaño de píxel 32 μm .

```

1 clear all;
2 x1=800;
3 y1=600;
4
5 [X,Y]=meshgrid(1:x1,1:y1);
6 k=4;
7 L1=8;
8 Thet=atan2((Y-y1/2),(X-x1/2));
9 f1=2*(1+cos(2*pi*X/k-L1*Thet));
10 figure(1); imagesc(f1); colormap gray, axis off
11 %f2=angle(exp(i*L1*Thet));
12 % i=imrotate(f1,-90,'bilinear','crop');
13 % figure(2); imagesc(i); colormap gray, axis off
14 %figure(3); imagesc(f2); colormap gray, axis off
15 %return
16 %%%%%%%%%
17 p=figure(1);
18 set(p,'menu','none','toolbar','none','Numbertitle','off');
19 p1=gca;
20 rec=get(p1,'position');
21 set(p1,'position',[0, 0, 1, 1]);
22 h=2*600;
23 v=2*800;
24 set(p,'position',[-10,-10,v,h]);
25
26 %hgsave('k4L15');
```

Difracción de campo lejano con MEL

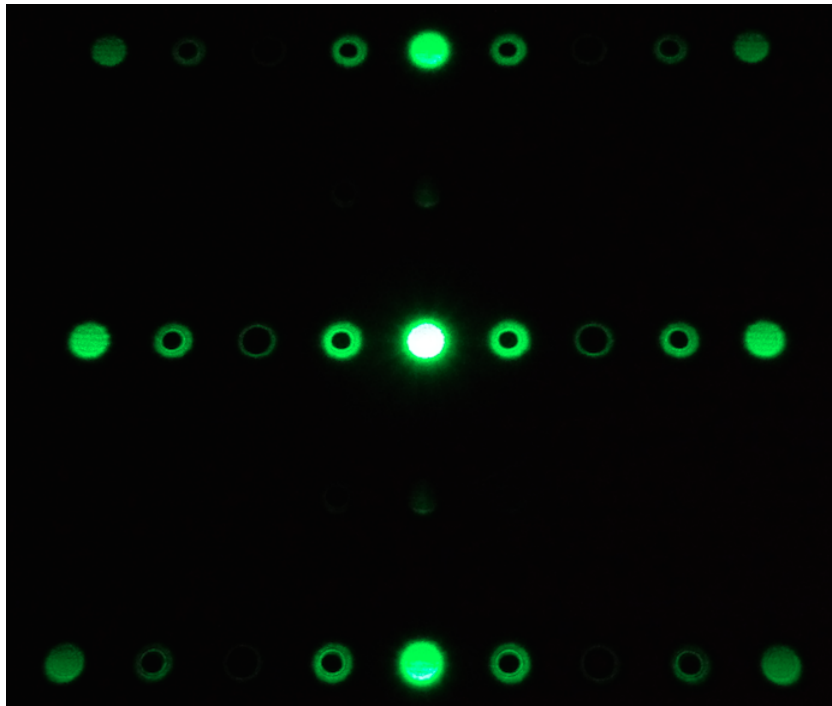
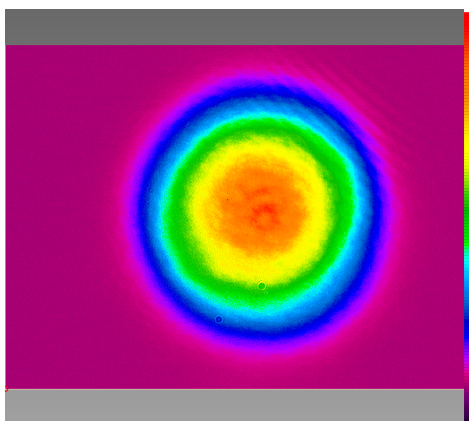


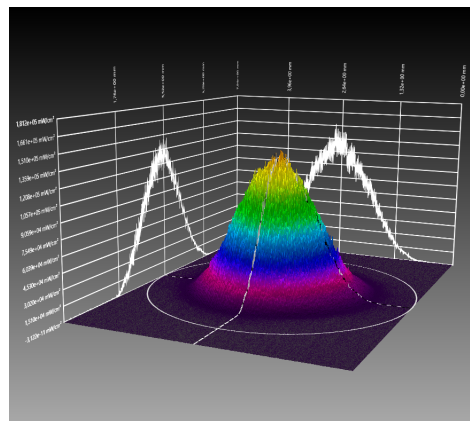
Figura C.1: Distribución en campo lejano de los ordenes de difracción para el HGC con $m = 3$

APÉNDICE D

Perfiles de ajuste



(a)



(b)

Figura D.1: Perfil de intensidad del láser de tubo $He - Ne$, $\lambda = 632$ nm, (a) 2D y (b) 3D.

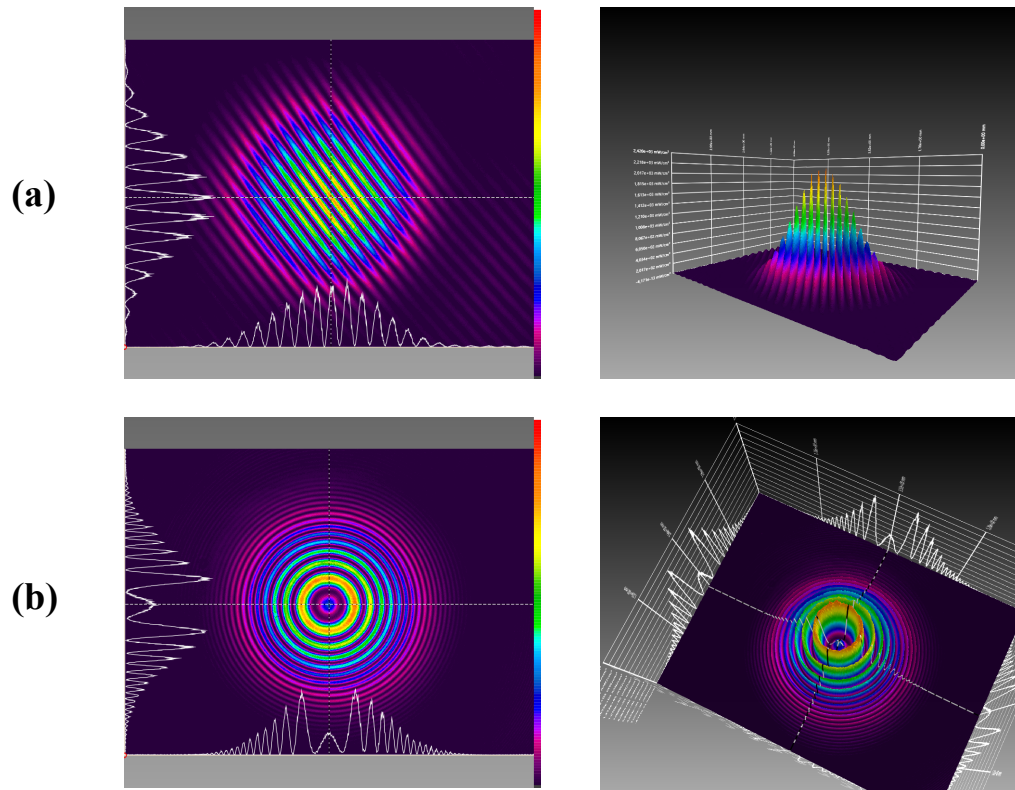


Figura D.2: Perfiles de ajuste del *Mach – Zehnder* para ondas Gaussiana (a) y para onda Gaussiana y onda esférica (b).

Diagrama para determinación de la carga topológica

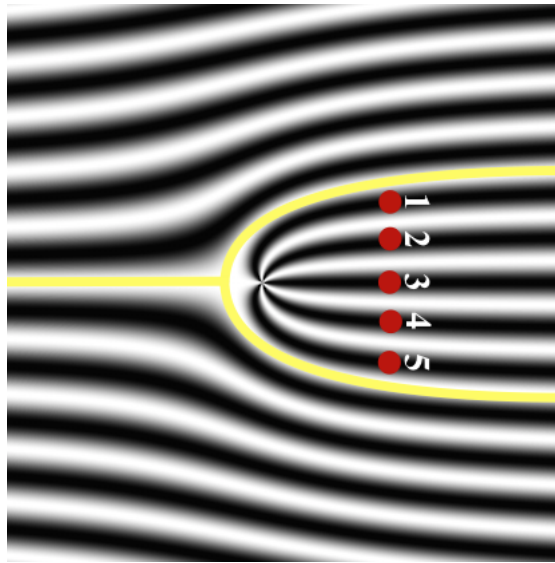
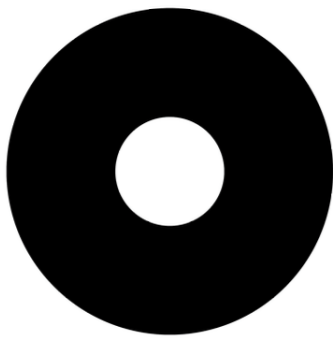
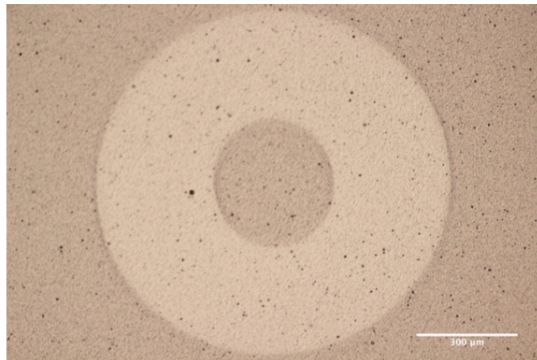


Figura E.1: Método para medir la carga topológica $|m|$ de un vórtice óptico mediante la fase, a partir de las franjas oscuras del patrón de bifurcación por interferencia con una onda Gaussiana de referencia en un *Mach – Zehnder*.

Abertura anular circular



(a)



(b)

Figura F.1: Abertura óptica en forma de anillo simulada (a) y su imagen grabada sobre negativo fotográfico con escala de 300 μm (b).

APÉNDICE G

Perspectivas

En trabajos cercanos se mostrará una descripción formal sobre el fenómeno de difracción de haces que transportan momento angular orbital a través de una abertura anular circular y geometrías similares. Además, identificar la equivalencia descriptiva entre la abertura anular circular y una guía de onda con igual sección transversal.

Se espera utilizar el código empleado para la técnica de holografía sobre negativo fotográfico en un modulador espacial de luz y comparar resultados.

Finalmente, se construyeron aberturas ópticas adicionales y hologramas compuestos que surgen de la superposición de dos hologramas en forma de tenedor y se grabaron sobre negativo fotográfico siguiendo la técnica antes descrita. Aunque estas rejillas se encuentran pendientes por analizar, las imágenes de la simulación y su apariencia frente al microscopio óptico se muestran a continuación:

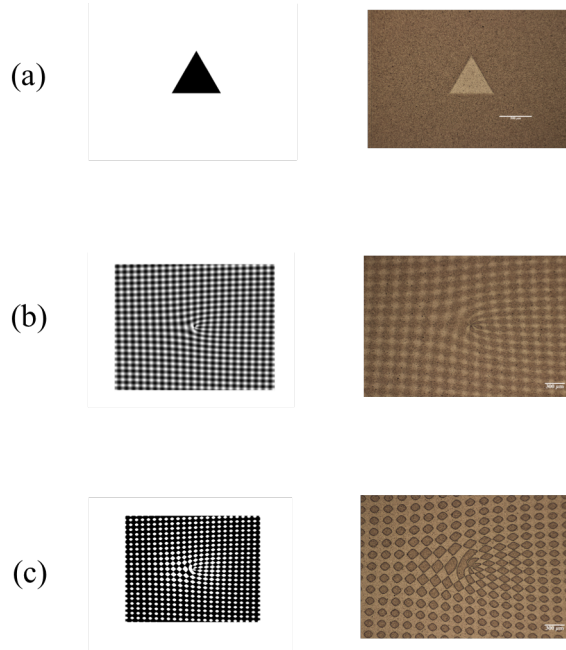


Figura G.1: Simulación y negativo fotográfico de abertura triangular (a) y hologramas compuestos en escala de grises (b) y binarizado (c).

Bibliografía

- [1] R. A. Beth, Phys. Rev. **50** (1936).
- [2] J. H. Poynting, Proc. R. Soc. London, Ser. A **82**, 560 (1909).
- [3] A. Ashkin, Science **210**, 1081 (1980).
- [4] S. Stenholm, Rev. Mod. Phys, **58**, pp 699 (1986).
- [5] A. P. Kazantsev, Surdutovich G. I., and Yakovlev K. V., World Scientific, Singapore (1990).
- [6] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw and J. P. Woerdman, Phys. Rev. A. **45**, 8185-9 (1992).
- [7] D. Marcuse, Van Nostrand, New York (1972).
- [8] E. Abramochkin and V. Volostnikov, Opt. Commun. **83**, 123 (1991).
- [9] L. Bambrilla L. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm, and C. Weiss, Phys. Rev. A, **43**, 5014 (1991).
- [10] E. Galvez, Colgate University, (2009).
- [11] Galvez, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1034 (1990).
- [12] J. Masajada, Wroclaw University of Technology, 36, (2004).
- [13] J. Conry, R. Vays and S. Singh, J. Opt. Soc. Am. A **30**, 821-823 (2013).
- [14] S. Oemrawsingh, E. Eliel, G. Nienhuis, and J. Woerdman, J. Opt. Soc. Am. A **21**, 2089 (2004).
- [15] R. Arora, IEEE Proc.—Microw. Antennas Propag., **141**, 3 (1994).
- [16] M. Berry and M. Dennis **34**, 8877– 8888 (2001).
- [17] G. Molina–Terriza, Physical Review A, **78**, 053819 (2008).
- [18] J. Courtial, Optics Comm. **151**, 1–4 (1998).
- [19] G. Indebetouw, Journal of Modern Optics, **40**, 73-87 (1993).
- [20] S. Kennedy, M. Szabo, H. Teslow, J. Porterfield, and E. Abraham **66**, 043802 (2002).

-
- [21] F. Pampaloni, J. Enderlein. Cell Biology and Biophysics Programme, Heidelberg, Germany **39**, (2003).
- [22] C. Maurer, A. Jesacher, S. Fürhapter, S. Bernet and M. Ritsch–Marte. New Journal of Physics, **9**, 78 (2007).
- [23] J. Enderlein and F. Pampaloni. J. Opt. Soc. Am. A, **21**, 8 (1999).
- [24] E. Zauder. J. Opt. Soc. Am. A, **21**, 8 (1996).
- [25] A. Bekshaev, M. Soskin, M. Vasnetsov, Opt. Comm., Elsevier **249**, 367–378 (2005).
- [26] K. Bliok, A. Bekshaev and F. Nori, Nat Com, **5**, 3300 (2014).
- [27] R. Cameron, S. Barnett and A. Yao, Nat Com, **61**, 25–31 (2014).
- [28] L. Allen, S. Barnett and M. J Padgett, IOP, Philadelphia (2003).
- [29] J. D. Jackson, 3rd ed., Wiley & Sons, New York (1998).
- [30] T. Asavei, V. Loke, M. Barbieri, T. Nieminen, N. Heckenberg and H. Rubinsztein–Dunlop. New J. Phys., **11**, 093021 (2009).
- [31] T. Nieminen, T. Asavei, V. Loke, N. Heckenberg, H. Rubinsztein–Dunlop. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, **110**, 1472–1482 (2009).
- [32] C. Demore, Z. Yang, A. Volovick, S. Cochran, M. MacDonald and G. Spalding. Phys. Rev. Lett., **108**, 194301 (2012).
- [33] S. Parkin, G. Knöner, T. Nieminen, N. Heckenberg and H. Rubinsztein–Dunlop. Proc. of SPIE, **6326**, 63261B (2006).
- [34] B. Sokolenko, M. Kudryavtseva, A. Zinovyev, V. Konovalenko, A. Rubass. Proc. of SPIE, **8338**, 83380D-1 (2011).
- [35] K. Toyoda, F. Takahashi, S. Takizawa, Y. Tokizane, K. Miyamoto, R. Morita and T. Omatsu. Phys. Rev. Lett., **110**, 143603 (2013).
- [36] A. Groisman and V. Steinberg, New J. Phys. **6**, 29 (2004).
- [37] T. Omatsu and R. Morita. Omatsu, SPIE Newsroom, (2013).
- [38] S. Simpson and S. Hanna. J. Opt. Soc. Am. A, **26**, 1 (2009).

-
- [39] S. Parkin, R. Vogel, M. Persson, M. Funk, V. Loke, T. Nieminen, N. Hekkenberg and H. Rubinsztein–Dunlop, *Optics Express*, **17**, 21944–21955 (2009).
- [40] S. Simpson and S. Hanna. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 3 (2009).
- [41] D. Ruffner and D. Grier. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 173602 (2012).
- [42] M. Nairat and D. Voelz, *Imag. and App. Opt. OSA PM2C.4* (2015).
- [43] J. Karczmarek, J. Wright, P. Corkum, and M. Ivanov. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3420 (1999).
- [44] J. E. Curtis and D. Grier. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 133901 (2003).
- [45] R. Zambrini and S. Barnett, *Journal of Modern Optics*. **52**, 8 (2005).
- [46] Sepúlveda A. *Electromagnetismo*, Universidad de Antioquia, 2009.
- [47] Siegman A. E., *Lasers*, Sausalito, CA: University Science Books, 1986.
- [48] M. Coles and D. Andrews. *Phys. Rev. A*. **85**, 063810 (2012).
- [49] S. Barnett, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 4 (2002).
- [50] G. Molina-Terriza, J. Torres, and Ll. Torner *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 013601 (2002).
- [51] C. Alexeyev, M. Yavorsky and Y Shvedov. *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**, 3 (2008).
- [52] B. García. *Fundamentos de Electromagnetismo*, Granada (2005).
- [53] O. Yamashita. *Elsevier, Optik*, **122**, 2119-2123 (2011). *Prog. Opt.* **39**, 291-372 (1999).
- [54] M. Padgett, F. Miatto, M. Lavery, A. Zeilinger and R. Boyd. *IOP, New J. Phys.* **17**, 023011 (2015).
- [55] L. Allen, M. Padgett and M. Babiker. *E. Wolf Progress in Optics XXXE. The Orbital Angular Momentum of Light*, (1999).
- [56] M. Padgett. *Opt. Comm., Elsevier* **121**, 36-40 (1995).
- [57] L. Allen and M. Padgett. *Opt. Comm., Elsevier* **184**, 67-71 (2000).
- [58] J. Leach, S. Keen and M. Padgett. *Optics Express*, **14**, 11919 (2009).

-
- [59] S. Reddy, C. Permangatt, S. Prabakar *Applied Optics*, **52** 22 (2015).
- [60] R. Cameron, S. Barnett and A. Yao. *Journal of Modern Optics*. **61**, 25–31 (2014).
- [61] K. Bliokh, J. Dressel and F. Nori. *New J. Phys.* **15**, 093037 (2014).
- [62] S. Barnett. *J Mod. Opt.* **57**, 1339–1343 (2010).
- [63] W. Fushchych. *Scientific Works*, **2** (2000).
- [64] R. Cameron and S. Barnett. *New J. Phys.* **14**, 123019 (2012).
- [65] L. Wen–Feng, W. Ming, L. Hui and C. Xiang–Song. *Chin. Phys. Lett.*, **25**, 4227 (2008).
- [66] S. Tiwari. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **11**, 6 (2009).
- [67] J. Humblet. *Physika X*, 7 (1943).
- [68] A. O’Neil, I. Macvicar, L. Allen, and M. Padgett. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 053601 (2002).
- [69] Cohen–Tannoudji, Dupront–Roc, and Grynberg G.. *Photons and Atoms*, New York: John Wiley Sons (1989).
- [70] L. Evans. *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Berkeley (1997).
- [71] J. Crichton and P. Marston. *Electronic Journal of Differential Equations*, Conf. 04, **39**, 37–50 (2000).
- [72] A. Stewart *Journal of Modern Optics*. **59**, 772–776 (2011).
- [73] Mansuripur *Phys. Rev. A*. **84**, 033838 (2011).
- [74] A. Stewart *Journal of Modern Optics*. **52**, 1145–1154 (2005).
- [75] *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **13**, 064014 (2011).
- [76] L. Allen and M. Padgett. *The Orbital Angular Momentum of Light: An Introduction*, Wiley-Vch, Weinheim (2011).
- [77] N. Simpson, K. Dholakia, L. Allen and M. Padgett. *Optics Express*, **22**, 52 (1997).
- [78] Zhao *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 073901 (2007).

-
- [79] M. Kristensen, M. Beijersbergen and J. Woerdman. Opt. Comm., **104**, 229–233 (1993).
- [80] O. Yamashita Opt. Comm., Elsevier **249**, 3740–3747 (2012).
- [81] L. Marrucci. Proc. of SPIE, 658708 (2007).
- [82] L. Marrucci¹, E. Karimi, S. Slussarenko, B. Piccirillo, E. Santamato, E. Nagali and F. Sciarrino. J. of Optics. **13**, 064001 (2011).
- [83] J. Sjöholm and K. Palmer Angular Momentum of Electromagnetic Radiation, Uppsala Universitet (2007).
- [84] H. He, Hons. Thesis. The University of Queensland (1993).
- [85] Heckenberg, N. R., McDuv, R., Smith, C. P., and White, A. G., Optics. Lett., **17**, 221 (1992).
- [86] H. He, M.E.J. Friese, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, Phys. Rev.Lett., **75**, 826–829 (1995).
- [87] A. Carpentier, H. Michinel, and J. Salgueiro, Am. J. Phys. **76**,10, (2008).
- [88] L. Allen, M. J. Padgett and M. Babiker, Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [89] M. Padgett and L. Allen. Contemporary Physics **41**, 275-285 (2000).
- [90] M. Padgett, J. Courtial, and L. Allen. Physics Today, 35–40 (2004).
- [91] M. Dennis, Y. Kivshar, M. Soskin and G. Swartzlander. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics **11**, 090201 (2009).
- [92] M. Dennis, K. O’Holleran and M. Padgett. Singular Optics: Optical Vortices Singularities, Progress in Optics, **53**, (2009).
- [93] S. Barnett and R. Zambrini. Orbital Angular Momentum of Light, University of Strathclyde, Glasgow (2010)
- [94] G. Terriza. J. of Optics. **13**, 060201 (2011).
- [95] A. Yao and M. Padgett, Advances in Optics and Photonics, **3**, OSA (2011).
- [96] S. Franke-Arnold. Proc. of SPIE, **8637** (2013).
- [97] M. Padgett. Proc. R. Soc. A. **470** 20140633 (2014).
- [98] Genevet Rep. Prog. Phys. **78**, 024401 (2015).

-
- [99] A. Willner, et al., *A new twist for communications*, Nature Photonics 6, 498 (2012).
- [100] G. Nienhuis. ed. Andrews D. L., Boston (2008).
- [101] Z. Sacks J. Opt. Soc. Am. A, **15**, 2226–2234 (1998).
- [102] O. Emile, M. Meur, and J. Emile. Phys. Rev. A. **89**, 013846 (2014).
- [103] L. Janicijevic and S. Topuzoski. J. Opt. Soc. Am. A, **25**, 2659 (2008).
- [104] A. Bekshaev, S. Sviridova, A. Popov and A. Tyurin. Mechnikov National University, Odessa (2011).
- [105] H. Kogelnik and T. Li. Applied Optics, **5** 10, 1550–1567 (1966).
- [106] Y. Dong, F. Wang, Y. Cai and M. Yao. Opt. Comm., Elsevier **333**, 237–242 (2014).
- [107] Bekshaev, J. Opt. Soc. Am. A, **20**, 8 (2003).
- [108] G. Agarwal, J. Opt. Soc. Am. A, **6**, 12 (1999).
- [109] F. Roux, Opt. Comm., Elsevier **242**, 45–55 (2004).
- [110] I. Rigas, L. Sánchez-Soto, A Klimov, J. Rehacek and Z. Hradil. Annals of Physics **326** 426–439 (2011).
- [111] A. Wünsche, J. Opt. Soc. Am. A, **6**, (1989).
- [112] S. Seshadri, Applied Optics, **45** 21, 5335–5345 (2006).
- [113] S. Seshadri, Optics Letters **32** 9 1159–1161 (2007).
- [114] H. Kim and Y. Lee. Opt. Comm., Elsevier **249**, 367-378 (1999).
- [115] Seshadri, J. Opt. Soc. Am. A, **24**, 10 (2007).
- [116] R. Phillips and L. Andrews, Applied Optics **22** 5, 643-644 (1983).
- [117] C. Sheppard and S. Saghafi. Phys. Rev. A. **57**, 4 2971–2979 (1998).
- [118] M. Berry, SPIE **3487** (1998).
- [119] Ch. Li, Phys. Rev. A. **80**, 063814 (2009).
- [120] A. Cerjan and C. Cerjan. J. Opt. Soc. Am. A, **28**, 11 (2011).
- [121] Y. Luo and B. Lü. J. Opt. Soc. Am. A, **27**, 3 (2010).

- [122] Zauderer², J. Opt. Soc. Am. A, **27**, 3 (1996).
- [123] Herrero, Optics Express, **18**, 8 873–871 (2010).
- [124] Calvo Phys. Rev. A. **33**, 013805 (2006).
- [125] Wang Opt. Comm., Elsevier **351**, 367–378 (2015). J. Opt. Soc. Am. A, **26**, 3 (2014).
- [126] Physics Reports **541**, 1233–1236 (2011).
- [127] Andrews Proc. of SPIE, **8338**, 8813 (2013).
- [128] Padgett Optics Letters **24** 7 (1999).
- [129] Dennis Opt. Comm., Elsevier **213**, 367–378 (2002).
- [130] Lee Optics Express, **21**, 10 (2009).
- [131] Milione Phys. Rev. Lett., **107**, 133901 (2001).
- [132] Bliokh Phys. Rev. A. **86**, 8185–9 (2012).
- [133] J. Gazeau. Coherent States in Quantum Physics, Wiley-Vch, Weinheim (2009).
- [134] Galvez Phys. Rev. Lett., **90**, 203901 (2003).
- [135] Arnold New J. Phys. **6**, 29 (2004).
- [136] Pegg New J. Phys. **7**, 62 (2005).
- [137] Plick Phys. Rev. A. **87**, 8185–9 (2013).
- [138] Salazar J. Opt. Soc. Am. A, **31**, 3 (2014).
- [139] Leader Physics Reports **541**, 163–248 (2014).
- [140] Andersen Phys. Rev. Lett., **97**, 133901 (2006).
- [141] Speirits Phys. Rev. Lett., **111**, 133901 (2013).
- [142] Wei Opt. Comm., Elsevier **223**, 367–378 (2003).
- [143] B. Ma, Phys. Rev. D. **58**, 096008 (1998).
- [144] Cooke Phys. Rev. **174**, 5 (1968).
- [145] Lloyd Phys. Rev. Lett., **108**, 133901 (2012).

-
- [146] Perinova Journal of Modern Optics. **53**, 8 (2006).
- [147] Enk Journal of Modern Optics. **41**, 8 (1994).
- [148] H. Nam. Creating a Robust Optical Vortex Beam with a Single Cylinder Lens, Intel Science Talent Search (2010)
- [149] M. Padgett. Am. J. Phys. **64** 271–276 (1996).
- [150] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M. Padgett, Optics Comm., **144**, 210-213 (1997).
- [151] K. Contreras. Mosaico Cient. **47**, 2 (2005).
- [152] M. Beijersbergen, R. Coerwinkel, M. Kristensen, and J. Woerdman, Optics Comm., **112** 321-7 (1994).
- [153] Ruffato Optics Letters **39** 1863–1865 (2014).
- [154] Kotlyar Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [155] Samsheerali Opt. Comm., Elsevier **319**, 367–378 (2014).
- [156] Miyamoto Applied Physics Letters **104** 261104 (2014).
- [157] Sueda Optics Express, **3548**, 21944–21955 (2004).
- [158] Bovino Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [159] Moh Applied Optics, **46** 34, 8236 (2007).
- [160] Pors Phys. Rev. A. **77**, 8185–9 (2008).
- [161] Rotschild Applied Optics, **43** 34, 8236 (2004).
- [162] Oemrawsingh Journal of Optics A: Pure and Applied Optics **6**, 6 (2004).
- [163] Trunbull Opt. Comm., Elsevier **127**, 367–378 (1996).
- [164] Pramitha Proc. of SPIE, **8769**, 83380D-1 (2013).
- [165] Wang Optics Express, **13**, 25 (2005).
- [166] Cottrell Optics Express, **19**, 21944–21955 (2011).
- [167] Bazhenov Journal of Modern Optics. **39**, 8 (1992).
- [168] Eggleston J. Opt. Soc. Am. A, **30**, 3 (2013).

- [169] Sueda Optics Express, **12**, 21944–21955 (2004).
- [170] Oemrawsingh Applied Optics, **43** 34, 8236 (2004).
- [171] Steiger Optics Express, **21**, 21944–21955 (2013).
- [172] Basistiy Opt. Comm., Elsevier **119**, 367–378 (1995).
- [173] Azolin Applied Optics, **51** 43, 8236 (2004).
- [174] Oemrawsingh Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [175] S. Garanin <http://dx.doi.org/10.5772/53328> (2012).
- [176] Grillo Applied Physics Letters **104** 26145, 8185–9 (1992).
- [177] S. Konina. Optical Engineering, SPIE, **52**, 091711 (2013)
- [178] Ma Optical Engineering, SPIE, **52**, 091721 (2013)
- [179] Volyar Optics Express, **14**, 21944–21955 (2006).
- [180] Karimi Light: Science and Applications, Nature, **167**, 48 (2011).
- [181] Cheng Scientific Reports, Nature, **4**, 4814 (2011).
- [182] Cai Science **338**, 363 (2012).
- [183] Genevet Nat Com, **1278**, 1–5 (2012).
- [184] Yu Nat. Materials, **13**, 139–150 (2014).
- [185] Lin2 Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [186] Dolev Phys. Rev. Lett., **109**, 133901 (2012).
- [187] Yi2 Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [188] Tiwari. Optical Engineering, SPIE, **50**, 091711 (2011).
- [189] Zhang Optical Engineering, SPIE, **52**, 091711 (2013).
- [190] Zapata Opt. Comm., Elsevier **254**, 367–378 (2005).
- [191] Gourley Applied Optics, **50** 34, 8236 (2011).
- [192] Lin Optics Express, **17**, 21944–21955 (2009).
- [193] Zapata J. Opt. Soc. Am. A, **26**, 3 (2009).

-
- [194] Arlt Journal of Modern Optics. **52**, 8 (2001).
- [195] Mansuripur Proc. of SPIE, **809716**, (2011).
- [196] Masajada Opt. Comm., Elsevier **108**, 367–378 (2001).
- [197] Ding, Opt. Soc. Am, 190.4380 (2012).
- [198] Carbone Journal of Visualized Experiments, **78**, e50564 (2013).
- [199] Straupe Nat. Photonics, **4**, 585–586 (2010).
- [200] Bahabab Optics Express, **15**, 21944–21955 (2007).
- [201] Dreischuh Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [202] Huang Applied Optics, **52** 34, 8236 (2013).
- [203] Gonzalez Optics Express, **14**, 21944–21955 (2006).
- [204] Chu Optics Express, **16**, 19934–19949 (2008).
- [205] Abramochkin Opt. Comm., Elsevier **141**, 367–378 (1997).
- [206] J. Courtial, D. A. Robertson, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett. Phys. Rev. Lett., **81**, 4828-4830 (1998).
- [207] L. M. Soroko, *Holography and coherent optics*, Plenum Press, New York, London, (1980).
- [208] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen and M. J. Padgett, *Journal of Modern Optics*, **45**, 6, 1231–1237 (1998).
- [209] Bekshaev Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [210] Janicijevic J. Opt. Soc. Am. A, **25**, 3 (2008).
- [211] Bekshaev Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [212] Bekshaev Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [213] Jaiswal Journal of Modern Optics. **57**, 8 (2010).
- [214] Atencia Optics Express, **21**, 21944–21955 (2013).
- [215] N. Heckenberg Prog. Optics Letters **17** 221–223 (1992).
- [216] J. Strohaber. Applied Optics, **46** 34, 8236 (2007).

- [217] C. Ruvic. Experimental Investigation of Twisted Light, W. P. I. (2013).
- [218] Y. Li Proc. of SPIE, **3789**, (2010).
- [219] H. He. Journal of Modern Optics. **42**, 8 (1995).
- [220] F. Brand. Journal of Modern Optics. **44**, 6 1243–1248 (1997).
- [221] G. Indebetouw. Journal of Modern Optics. **40**, 1 73–87 (1993).
- [222] Bekshaev Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [223] Mariscal Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [224] Stoyanov Opt. Comm., Elsevier **350**, 367–378 (2015).
- [225] H. He, Phys. Rev. Lett., **75**, 5 133901 (1995).
- [226] Z. Rong Optics Express, **22**, 2 1637–1644 (2014).
- [227] Kotlyar Proc. of SPIE, **632710**, (2006).
- [228] Liu Optics Express, **25**, 16645–1665 (2007).
- [229] Matsumoto J. Opt. Soc. Am. A, **25**, 7 (2008).
- [230] Leach Optics Express, **14**, 25 11919–11924 (2006).
- [231] G. Spalding, J. Courtial and R. Leonardo. Holographic optical tweezers, (2007).
- [232] C. Acevedo, C. Díaz y Y. Torres. Ing. Desarro. Prog. Opt. **32**, 2 (2014).
- [233] C. Guo, J. Opt. Soc. Am. A, **22**, 2 (2005).
- [234] A. Montes, A. Martínez, G. Rodríguez, C. Robledo, J. Vázquez, N. Toto. Opt. Pura Apl. **46**, 1 33–37 (2013).
- [235] Gibson Optics Express, **12**, 22 5448–5456 (2004).
- [236] M. Lavery, J. Courtial, D. Robertson, G. Love, G. Berkhout and M. J. Padgett. CLEO Technical Digest, OSA (2012).
- [237] S. Li and Z. Wanga. APL, **103**, 141110 (2013).
- [238] B. Wei, W. Hu, Y. Ming, F. Xu, S. Rubin, J. Wang, V. Chigrinov, and Y. Lu, Adv. Mater. **26**, (2014).

-
- [239] L. Stuerzebechera, F. Fuchsb, T. Harzendorfb, S. Meyera, and Uwe D. Zeitner, Proc. of SPIE, **8974** 897415-1 (2014).
- [240] A. Burman. Tesis de grado, Universidad de Buenos Aires (2010).
- [241] M. MacDonald New J. Phys. **8**, 257 (2006).
- [242] Alexseyev Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [243] Aidas Opt. Comm., Elsevier **349**, 367–378 (2015).
- [244] Cheng Scientific Reports, Nature, **4**, 4814 (2011).
- [245] Smit Optics Express, **11**, 21944–21955 (2003).
- [246] Lerner Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [247] Senthilkumaran Applied Optics, **42** 34, 8236 (2033).
- [248] B. Garcia Proc. of SPIE, **8843** (2013).
- [249] J. Nye and M. Berry. Proc. R. Soc. London A.m **336**, 165–190 (1974).
- [250] K. O’Holleran, M. Padgett and M. Dennis. Optics Express, **14**, 3039–3044 (2006).
- [251] M. Soskin Phys. Rev. A. **56**, 4064–4075 (1997).
- [252] J. Sotomayor, Generic Bifurcations of Dynamical Systems, Rio de Janeiro, (1970).
- [253] Garanin Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [254] Emile J. of Optics. **16**, 6 (2014).
- [255] X. Qi, T. Hughes, and Sh. Zhang. Phys. Rev. B. **78**, 195424 (2008).
- [256] Sheppard Optics Express, **22** 15 18128–18141 (2014).
- [257] V. Pa’sko Proc. of SPIE, **5477** (2004).
- [258] T. Ali Proc. of SPIE, **9194** (2014).
- [259] Vasnetsov Proc. of SPIE, **3487** (1998).
- [260] Maurer New J. Phys. **9**, 29 (2007).
- [261] Lee Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).

-
- [262] Huang Opt. Comm., Elsevier **285**, 367–378 (2012).
- [263] Matijosius Opt. Comm., Elsevier **324**, 367–378 (2014).
- [264] Gotte J. B., Ph.D. dissertation, University of Strstchde (2006).
- [265] Leach2004 New J. Phys. **6**, 29 (2004).
- [266] Gotte Optics Express, **16**, 2 993–1006 (2008).
- [267] Odwyer Optics Express, **18**, 16480–16485 (2009).
- [268] Sh. Tao, W. Ming and X. Yuang. Applied Optics, **43** 34, 8236 (2004).
- [269] Liu Optics and Laser Technology, **43**, 1233–1236 (2001).
- [270] Liu Opt. Comm., Elsevier **284**, 2424–2429 (2011).
- [271] A. Mourka. Probing the modal characteristics of novel beam shapes, University of St Andrews, PhD T. (2013).
- [272] Mourka, FIO/ LS Technical Digest, 1–2 (2011).
- [273] Mourka Optics Express, **19**, 21944–21955 (2011).
- [274] Anderson J. Opt. Soc. Am. A, **29**, 8 (2012).
- [275] Hickmann J. M., Fonseca E. J., Soares W., and Chávez–Cerde S., Phys. Rev. Lett.**105**, 053904, 2010.
- [276] Fan Prog. Opt. **39**, 291-372 (1999).
- [277] B. Jassemnejad Optical Engineering, SPIE, **47**, 053001 (2008)
- [278] Vaity Prog. Opt. **36**, 127-130 (1999).
- [279] Beth Prog. Opt. **15**, 134-139 (2003).
- [280] Calvo Phys. Rev. A. **75**, 012319 (2007).
- [281] A. Vaziri, G. Weihs and A. Zeilinger. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4** (2002).
- [282] G. Terriza Nat. Phys., **61**, 25–31 (2014).
- [283] Jassemnejad Optical Engineering, SPIE, **47**, 053001 (2008)
- [284] Kumar Optics Letters **36** 1161–1163 (2011).

-
- [285] Y. Zhao Phys. Rev. Lett., **99**, 073901 (2007).
- [286] E. Fraczek Proc. of SPIE, **5858** (2005).
- [287] E. Fraczek Proc. of SPIE, **5945** (2005).
- [288] K. Saitoh Phys. Rev. Lett., **111**, 074801 (2013).
- [289] G. Guzzinati Phys. Rev. A., **89**, 025803 (2014).
- [290] J. Leach, M. Dennis, J. Courtial and M. Padgett, New Journal of Physics **7** 55 (2005).
- [291] Z. Bouchal, P. Zemanek, T. Cizmar, Proc. of SPIE, **6609** (2007).
- [292] J. Masajadaa, A. Popiotek-Masajada, D. Wieliczka, Optics Comm. **207** 8593 (2002).
- [293] G. Berkhout, M. Lavery, M. Padgett, M. Beijersbergen, Optics and Laser Technology **43** 1219-1224 (2011).
- [294] E. Fraczek, W. Fraczek, J. Masajadaa, Optik-Elsevier **117** 423-425 (2006).
- [295] G. Berkhout, M. Lavery, M. Padgett, M. Beijersbergen, Optics Letters **36** 1863-1865 (2011).
- [296] Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar, IEEE **99** 263-266 (2006).
- [297] S. Baumann, D. Kalb, L. MacMillan and E. Galvez, Optics Express-OSA **12** 9818 (2009).
- [298] M. Merano, N. Hermosa, and J. P. Woerdman, Phys. Rev. A **82**, 023817 (2010).
- [299] S. Topuzoski and L. Janicijevic, Journal of Modern Optics, **58** 20, 138-145 (2011).
- [300] A. Popiotek-Masajada, W. Fraczek, Optics Comm. **207** 8593 (2002).
- [301] T. Philbin, Phys. Rev. A **86**, 055802 (2012).
- [302] Zhisong Tong and Olga Korotkova Phys. Rev. A **84**, 043835 (2011).
- [303] A. Picón, A. Benseny, J. Mompart and G. Calvo, J. Opt. **13**, 064019 (2011).

-
- [304] M. Padgett, S. Barnett, and R. Loudon, *Phys. Journal of modern optics*, **50**, 1555–1562 (2003).
- [305] Y. Toda, S. Honda, R. Morita, *Optics Express* **18** 17796-17804 (2010).
- [306] A. Dreischuh, G. Paulus, F. Zacher, F. Grasbon, D. Neshev, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **60** 6, 7518-7524 (1999).
- [307] V. Loke, T. Asavei, A. Stilgoe, T. Nieminen, and H. Rubinsztein-Dunlop, *Optics Express-OSA* **22** 19692-19706 (2014).
- [308] D. Moothoo, J. Arlt, R. Conroy, F. Akerboom, A. Voit, and K. Dholakia, *Am. J. Phys.* **60** 271-276 (2001).
- [309] Y. Yan, G. Xie, M. Lavery, H. Huang, N. Ahmed, C. Bao, Y. Ren, Y. Cao, L. Li, Z. Zhao, A. Molisch, M. Tur, M. Padgett and A. Willner, *Nat. Comm.* **5** 4876 (2014).
- [310] N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. Willner, S. Ramachandran. *Science* **340**, 1545–1548 (2013).
- [311] C. R. Doerr, N. K. Fontaine, M. Hirano, T. Sasaki, L. L. Buhl, and P. J. Winzer, *Siegman A. E. OSA, Th.13.A,3* (2011).
- [312] A. Rose, D. Huang, and D. R. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 063902 (2011).
- [313] L. Marrucci, E. Karimi, S. Slussarenko, B. Piccirillo, E. Santamato, E. Nagali and Fabio Sciarrino. *J. of Optics.* **13**, 064001 (2011).
- [314] Ding *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 133901 (2005).
- [315] A. Nicolas, L. Veissier, L. Giner, E. Giacobino, D. Maxein, J. Laurat. *Nat. Photonics*, 1–5 (2013).
- [316] W. Tittel. *Nat, Quantum Physics*, **518**, 491–492 (2015).
- [317] Romero *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 100407 (2011).
- [318] Goyal *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 263602 (2033).
- [319] Chen *Phys. Rev. A.* **80**, 8185–9 (2009).
- [320] A. Marino, V. Boyer, Pooser, P. Lett, K. Lemons, and K. Jones. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 100407 (2008).
- [321] V. D’Ambrosio. *Proc. of SPIE*, **84400** (2012).

-
- [322] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs and A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001).
- [323] J. Gotte. Ph.D. dissertation, University of Strstchde (2006).
- [324] J. Nye. *Natural Focussing and the Fine Structure of Light*, Bristol: Institute of Physics Publishing (1999).
- [325] A. Schutza. *McNair Scholars Journal*, **14**, 8 (2010).
- [326] Calvo *Prog. Opt.* **39**, 291-372 (1999).
- [327] Leach *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 25 (2002).
- [328] P. Laid, W. Bowen, N. Treps, B. Bucliler and R. Scliiiabeli, *IEEE*, 410 (2003).
- [329] Zou *Phys. Rev. A.* **71**, 8185–9 (2005).
- [330] I. Ivanov. *Phys. Rev. A.* **85**, 8185–9 (2012).
- [331] A. Jha. *Phys. Rev. A.* **84**, 063847 (2011).
- [332] J. Garcia and P. Chamorro. *Phys. Rev. A.* **86**, 8185–9 (2012).
- [333] Robb *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 133901 (2015).
- [334] Ruseckas *Phys. Rev. A.*, **87**, 133901 (2013).
- [335] Helmerson *Proc. of SPIE*, **632603**, (2006).
- [336] G. Berkhout, and M. Beijersbergen, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 100801 (2008).
- [337] Bloch, N. V. et al. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 233902 (2012).
- [338] P. Dashti, F. Alhassen, and H. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 043604 (2006).
- [339] D. Andrews and M. Babiker, *The Angular Momentum of Light*, Cambridge, (2013).
- [340] A. Sepulveda, *Electromagnetismo*, Ed. Universidad el Antioquia, Medellín (2009).
- [341] Cosenza M. *Electromagnetismo*, Universidad de los Andes, Mérida (2015).
- [342] S. Barnett and L. Allen, *Opt. Commun.* **110** 670 (1994).

- [343] A. Gray, G. Matthews and T. MacRobert, London: Macmillan (1922).
- [344] H. He, N.R. Heckenberg and H. Rubinsztein Dunlop, Journal of Modern Optics, **42**, 217–223 (1995).
- [345] Y. Li, J. Kim, and M. Escuti, Applied Optics, **51** 34, 8236 (2012).
- [346] [http : //www.mathworks.com/company/newsletters/articles/new – features – for – high – performance – image – processing – in – matlab.html](http://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/new-features-for-high-performance-image-processing-in-matlab.html)
- [347] J. Hamilton, Advanced Physics, **37** 4, 359-441 (1998).
- [348] A. Friedman D. Ross, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH (2003).
- [349] J. Mitchell, Rep. Prog. Phys., **20** pp. 433–515 (1957).
- [350] T. Tadaaki, Physics Today, **42**(9), 36 (1989).
- [351] T. Tadaaki, Oxford University Press, Inc (1995).
- [352] [http : //www.optics.rochester.edu/workgroups/cml/opt307/spr04/jidong/](http://www.optics.rochester.edu/workgroups/cml/opt307/spr04/jidong/)
- [353] [http : //foto.difo.uah.es/curso/el_rivelado_de_negativo.html](http://foto.difo.uah.es/curso/el_rivelado_de_negativo.html)
- [354] [http : //filmphotographyproject.com/store/35mm – bw – kodak – kodalith – ortho](http://filmphotographyproject.com/store/35mm-bw-kodak-kodalith-ortho)
- [355] [http : //www.foto.difo.uah.es/curso/los_materiales_ensibles.html](http://www.foto.difo.uah.es/curso/los_materiales_ensibles.html)
- [356] [http : //www.photo.net/bboard/uploaded – file?bboard_upload_id = 36874084](http://www.photo.net/bboard/uploaded-file?bboard_upload_id=36874084)
- [357] [http : //www.kodak.com/global/en/professional/support/techPubs /j78/j78.pdf](http://www.kodak.com/global/en/professional/support/techPubs/j78/j78.pdf)
- [358] [https : //uwaterloo.ca/fine – arts/sites/ca.fine – arts/files /uploads/files/kodak_rapid_fixer_art_a.pdf](https://uwaterloo.ca/fine-arts/sites/ca.fine-arts/files/uploads/files/kodak_rapid_fixer_art_a.pdf).
- [359] L. Yongxin, T. Hua, P. Jixiong and L. Baida, Optics and Laser Technology, **43**, 1233–1236 (2011).
- [360] L. Yongxin, P. Jixiong. Optics Comm., **284**, 2424–2429 (2011).
- [361] N. Heckenberg, R. McDuff, C. Smith, and A. White, Optics Letters, **17** 3 433-515, (1992).
- [362] L. Stoyanov, S. Topuzoski, I. Stefanov, L. Janicijevic, A. Dreischuh, Optics Comm., **350**, 301–308 (2015).